

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

● Greenwood, T.: Les fondements de la logique symbolique. I, II. (Actualités scient et industr. Nr 588, 593.) Paris: Hermann & Cie. 1938. Je Frs. 18.—.

● Lautman, A.: Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel. (Actualités scient. et industr. Nr 589.) Paris: Hermann & Cie. 1938. Frs. 15.—.

Morduhai-Boltovskoi, D.: Insolubles in Scholastica et paradoxos de infinito de nostro tempore. Wiadom. mat. 47, 111—117 (1939) [Lateinisch].

Darstellung der Paradoxie des „Lügners“ und der Russellschen Antinomie sowie einiger Abwandlungen der ersteren aus der scholastischen Literatur. Gerhard Gentzen.

McKinsey, J. C. C.: Proof of the independence of the primitive symbols of Heyting's calculus of propositions. J. Symbolic Logic 4, 155—158 (1939).

In dieser Arbeit wird das von Heyting ohne Beweis angegebene, von Wajsberg zuerst bewiesene Theorem, das die Unmöglichkeit der Definierbarkeit eines der Funktoren des intuitionistischen Aussagenkalküls (IK) $\neg, \vee, \wedge, \supset$ durch die drei übrigen behauptet, unabhängig von Wajsberg neu bewiesen. Ist F einer dieser Funktoren, so ist zu beweisen, daß es keinen Ausdruck H des IK gibt, der F nicht enthält, derart, daß $aFb \cdot \supset \supset C \cdot H$ beweisbar ist. McKinsey führt diese Unmöglichkeitsbeweise, indem er je eine Matrix angibt, zu der es eine Teilmenge M der Wertmenge N dieser Matrix gibt, die abgeschlossen ist in bezug auf die von F verschiedenen Funktoren, während sie nicht abgeschlossen ist in bezug auf F . Hierbei heißt M abgeschlossen in bezug auf den Funktor G dann und nur dann, wenn der Wert von pGq für jedes $p, q \in M$ selbst M -Element ist. Die von McKinsey angegebenen Matrizen sind $\Gamma(\mu^*)$, $\Gamma(\mu^* \cdot \mu^*)$, $\Gamma(\mu^*) \cdot \Gamma(\mu^*)$, wo die Γ -Relation bzw. die Produktrelation die von Jaskowski für Matrizen angegebenen Relationen der „Erweiterung um ein Element“ bzw. des „direkten Produkts“ sind, und wo μ^* die klassische zweiwertige Matrix andeutet. Schröter (Münster i. W.).

Gégalkine, I.: Sur l'Entscheidungsproblem. Rec. math. Moscou, N. s. 6, 185—196 u. franz. Zusammenfassung 197—198 (1939) [Russisch].

Nach Ackermann [Math. Ann. 112, 419—432 (1936); dies. Zbl. 13, 241] ist ein Ausdruck Φ der Form $(x) (Ey) F(x, y) \& (x_1) (x_2) \dots (x_n) \mathfrak{A}(F; x_1, x_2, \dots, x_n)$ genau dann in einem endlichen Bereich erfüllbar, wenn er dies in einem Bereich mit $n + 1$ Elementen ist. Eine Entscheidung erfordert daher $\sum_{r=1}^{n+1} 2^{r^2}$ Einzelnachprüfungen. Verf.

zeigt, daß sich diese Zahl auf $n + 1$ reduzieren läßt: Φ ist in jedem endlichen Bereich unerfüllbar, wenn $(Ex_1) (Ex_2) \dots (Ex_n) \mathfrak{A}(F; x_1, x_2, \dots, x_n)$ für $n + 1$ spezielle zweistellige Prädikate $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \tau_n$, die für Bereiche mit $1, 2, \dots, n, n$ Elementen erklärt sind, wahr ist. Hierbei ist σ_1 wahr, und σ_r wahr genau für die Elementepaare $(1, r), (2, 1), \dots, (r, r - 1)$ und τ_n genau für $(2, 1), \dots, (n, n - 1)$. Hermes.

Fitch, Frederic B.: The hypothesis that infinite classes are similar. J. Symbolic Logic 4, 159—162 (1939).

Es wird gezeigt, daß das von Whitehead und Russell in den Principia Mathematica benutzte logische System nach Entfernung des Axioms der Reduzibilität widerspruchsfrei bleibt, wenn folgende Axiome hinzugefügt werden: 1. das Unendlichkeitsaxiom, 2. das Auswahlaxiom, 3. das Gegenteil des Reduzibilitätsaxioms, 4. der Satz, daß alle unendlichen Mengen gleichmächtig sind. Der Beweis gelingt durch Modifizierung einer vom Verf. bereits früher angewandten Methode (vgl. dies. Zbl. 20, 97).

Ackermann (Burgsteinfurt).

Ogasawara, Tôzîrô: Relation between intuitionistic logic and lattices. J. Sci. Hiroshima Univ. A 9, 157—164 (1939).

Verf. führt aus, daß die Aussagen des intuitionistischen Aussagenkalküls (vgl. A. Tarski, Fundam. Math. 31, 103—134; dies. Zbl. 20, 337) einen „residuated lattice“ (vgl. M. Ward, Ann. of Math. 39, 558—568; dies. Zbl. 20, 343) mit Nullelement bilden, wenn die Implikation $A \rightarrow B$ als „residual“ $A : B$ gedeutet wird. Lorenzen.

Kalmár, László: On the possibility of definition by recursion. Acta Litt. Sci. Szeged 9, 227—232 (1940).

Dafür, daß durch das „primitive“ Rekursionsschema $\varphi(0) = \alpha$, $\varphi(n') = \beta(n, \varphi(n))$ (n' = Nachfolger von n unter Zugrundelegung von Peanos Axiomensystem für die natürlichen Zahlen) die Zahlen $\varphi(n)$ für alle n definiert sind, gibt Verf. einen Beweis, der „partielle Lösungen“ dieses Schemas heranzieht, d. h. Lösungen ψ , die folgende Bedingungen erfüllen: a) Ist $\psi(0)$ definiert, so ist $\psi(0) = \alpha$; b) ist $\psi(n')$ definiert, so ist auch $\psi(n)$ definiert, und es ist $\psi(n') = \beta(n, \psi(n))$. Kamke (Tübingen).

Péter, Rózsa: Contribution to recursive number theory. Acta Litt. Sci. Szeged 9, 233—238 (1940).

Verf. zeigt, daß das Rekursionsschema

$$\varphi(n, a) = \alpha(a), \quad \varphi(n', a) = \beta(n, a, \varphi(n, \gamma(n, a)))$$

(α, β, γ primitive rekursive Funktionen) entgegen einer Vermutung von Skolem auf primitive Rekursionsschemata zurückgeführt werden kann. Kamke (Tübingen).

Algebra und Zahlentheorie.

Elementare und lineare Algebra, Polynome:

● Krull, Wolfgang: Elementare Algebra vom höheren Standpunkt. (Sammlung Götschen Bd. 930.) Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1939. 143 S. u. 6 Fig. geb. RM. 1.62.

Verf. stellt neben die Elementargeometrie vom höheren Standpunkt eine elementare Algebra vom höheren Standpunkt, die er bewußt von der „höheren Algebra“ unterscheidet, die jedoch einen wohlbegründeten Einblick in die Ziele der Algebra gewährt. Dem Charakter der Aufgabe entsprechend beginnt Verf. mit dem formalen Buchstabenrechnen und entwickelt ausführlich trotz des engen Raumes unter besonderer Beachtung der numerisch erfaßbaren Zusammenhänge, die durch Beispiele und Aufgaben ausgebaut werden, die Theorie der Polynome und Gleichungen bis zur höheren Gleichungstheorie. In dem für Kreisteilungsgleichungen ermittelten Hauptsatz der Galois-theorie gipfelt die Darstellung in einem Ausblick auf die umfassenden Problemstellungen der modernen Algebra. E. Schulenberg (Berlin).

Blumenthal, Leonard M.: Metric methods in determinant theory. Amer. J. Math. 61, 912—922 (1939).

Verf. beweist einige Determinantensätze, für die das folgende Beispiel typisch ist. Es sei $\Delta = |r_{ij}|$ eine m -reihige Determinante mit $r_{ij} = r_{ji}$, $-1 < r_{ij} \leq 0$ ($i \neq j$) und $r_{ii} = 1$; für eine natürliche Zahl $n < m - 3$ gelte: Jeder k -reihige Hauptminor Δ_k von Δ ist ≥ 0 , > 0 , $= 0$ für resp. $k < n + 1$, $k = n + 1$, $k = n + 2$. Dann ist jedes Element $r_{ij} = -1/(n + 1)$ für $i \neq j$ und jeder Hauptminor

$$\Delta_k = (n + 2)^{k-1} \cdot (n + 1)^{-k} \cdot (n - k + 2)$$

für $1 \leq k \leq m$. — Zum Beweis dieser Sätze benutzt Verf. die metrische Charakterisierung derjenigen halbmétrischen Räume Σ (je 2 Punkten p, q von Σ ist eine reelle, nichtnegative Zahl pq mit $pq = qp$ und $pq = 0 \leftrightarrow p = q$ zugeordnet), die folgende vier Eigenschaften haben: 1. ist $S_{n,r}$ die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r im euklidischen E_{n+1} , wobei als Abstand zweier Punkte von $S_{n,r}$ die Länge des kürzesten sie verbindenden Bogens $\subset S_{n,r}$ gewählt ist, so kann jedes System von $n + 2$ Punkten aus Σ abstandstreu in $S_{n,r}$ abgebildet werden; 2. Σ kann nicht abstandstreu in

$S_{n,r}$ abgebildet werden; 3. es ist $pq \neq \pi r$ für je zwei Punkte aus Σ ; 4. Σ enthält mehr als $n + 3$ Punkte. (Vgl. dies. Zbl. 14, 196; 19, 329; 20, 80.) *Nöbeling.*

Williamson, John: The exponential representation of automorphs of a symmetric or Hermitian matrix. Amer. J. Math. 62, 153—164 (1940).

Verf. ersetzt die schiefsymmetrische Matrix G (dies. Zbl. 22, 100) durch eine Hermitesche oder symmetrische Matrix H und erhält mit denselben Methoden ähnlich lautende notwendige und hinreichende Bedingungen für die Exponentialdarstellung $C = \exp(HG)$ der Matrix C , die $HC^* = H$ erfüllt. G ist hier an die Stelle der symmetrischen Matrix S getreten und ist schiefsymmetrisch, wenn H symmetrisch ist; C^* bedeutet dann die transponierte Matrix zu C . Ist H eine Hermitesche Matrix, so ist G eine anti-Hermitesche Matrix und umgekehrt; C^* bedeutet dann die konjugierte transponierte Matrix zu C . Beispiel. *E. Schulenberg (Berlin).*

Specht, Wilhelm: Zur Theorie der Gruppen linearer Substitutionen. II. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 49, Abt. 1, 207—215 (1940).

Zuerst wird der folgende Satz bewiesen. Es sei \mathfrak{G} ein System von Matrizen n -ten Grades aus komplexen Zahlen, welches mit einer regulären Matrix P reduziert werden kann:

$$P\mathfrak{G}P^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & 0 \\ \mathfrak{G}_{21} & \mathfrak{G}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{Grad von } \mathfrak{G}_1 = m < n).$$

Dann gibt es auch eine unitäre Matrix U , die \mathfrak{G} reduziert,

$$U\mathfrak{G}U^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{H}_1 & 0 \\ \mathfrak{H}_{21} & \mathfrak{H}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{Grad von } \mathfrak{H}_1 = m),$$

und zwar so, daß \mathfrak{H}_1 zu \mathfrak{G}_1 , \mathfrak{H}_2 zu \mathfrak{G}_2 ähnlich sind (d. h. es gibt zwei reguläre Matrizen R_1 und R_2 vom Grade m bzw. $n - m$, so daß $\mathfrak{H}_1 R_1 = R_1 \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_2 R_2 = R_2 \mathfrak{G}_2$ ist). — Aus diesem Satze werden dann verschiedene Aussagen über die Reduzibilität gewisser Systeme von Matrizen abgeleitet. Das allgemeinste Resultat lautet folgendermaßen: Eine Gruppe \mathfrak{G} von Matrizen n -ten Grades ist gewiß vollreduzibel, wenn für jede Matrix G_α einer linearen Basis G_1, G_2, \dots, G_r des Gruppenringes $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ ($G_1, G_2, \dots, G_r \in \mathfrak{G}$) auch die Gruppe $(G_\alpha^*)^{-1} \mathfrak{G} G_\alpha^*$ in $\mathfrak{R}(\mathfrak{G})$ enthalten ist (hier wird mit G_α^* die zu G_α transponiert-konjugierte Matrix bezeichnet). (Vgl. dies. Zbl. 16, 351.)

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Turri, T.: Sulle omografie quadrato di antiomografie. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 9, 195—203 (1939).

In einem beliebigen n -dimensionalen Raume ist das Quadrat β^2 einer Antikollineation β eine Kollineation; die Determinante Δ der Kollineation β^2 ist aber keine allgemeine Determinante der Ordnung $n + 1$. Ist B die Determinante von β , so ist $B\bar{B}$ diejenige von β^2 , wo \bar{B} die komplex-konjugierte Matrix von B bedeutet. Es wird hier bewiesen, daß die charakteristische Matrix $\|B\bar{B} - \rho I\|$ von B folgende Eigenschaften besitzt: 1. die Elementarteiler, die zwei konjugiert-imaginären Wurzeln entsprechen, haben dieselben Ordnungen; 2. die Elementarteiler, die einer reellen negativen Wurzel entsprechen, haben paarweise denselben Grad. Es wird dann bewiesen, daß diese beiden Eigenschaften hinreichend sind, damit Δ die Form $B\bar{B}$ besitze.

E. G. Togliatti (Genova).

Tatuzawa, Tikao: Über die Irreduzibilität gewisser ganzzahliger Polynome. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 253—254 (1939).

Von G. Pólya stammt folgender Satz [Jber. Deutsch. Math.-Verein. 28, 31—40 (1919)]: Nimmt ein ganzzahliges Polynom n -ten Grades $P(x)$ an n voneinander verschiedenen ganzzahligen Stellen Werte an, die sämtlich von 0 verschieden und dem Betrag nach kleiner als die Schranke $2^{-\left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)} \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)!$ sind, so ist $P(x)$ im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel. Verf. verschärft dieses Kriterium, indem er zeigt, daß die Pólyasche Schranke durch $\{2^{-n}(n-1)!\}^{1/2}$ ersetzt werden kann. *Schulz.*

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

● Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Bd. 1: Algebra und Zahlentheorie. Tl. 1: A. Grundlagen. B. Algebra. 2., völl. neubearb. Aufl. Hrsg. v. H. Hasse u. E. Hecke. H. 5. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1939. 135 S. u. 7 Abb. RM. 9.60.

Hermes, Hans, und Gottfried Köthe: Theorie der Verbände. S. 1—28 u. 7 Abb.

Die Theorie der Verbände (structures, lattices), von Dedekind inaugurirt, hat in den letzten 10 Jahren rasch an Bedeutung gewonnen. Ein Verband kann durch zwei Verknüpfungen $a \cup b$ und $a \cap b$ oder durch eine Verknüpfung $a \subseteq b$ erklärt werden. Die wichtigsten Sonderklassen sind: die modularen oder Dedekindschen Verbände mit ihren Isomorphie- und Zerlegungssätzen, die distributiven Verbände und unter ihnen besonders die Booleschen Verbände, die zur Logik und Mengentheorie die engsten Beziehungen haben, schließlich die komplementären modularen Verbände, mit denen die Axiomatik der projektiven und affinen Geometrien begründet werden kann. Alle diese Begriffe und Beziehungen werden kurz, aber klar und vollständig dargelegt. Auch über die kontinuierlich-dimensionalen Geometrien von J. Neumann wird im letzten Kapitel berichtet.

van der Waerden (Leipzig).

Pickert, Günter: Neue Methoden in der Strukturtheorie der kommutativ-assoziativen Algebren. Math. Ann. 116, 217—280 (1938).

Jede kommutative assoziative Algebra mit Einselement ist direkte Summe von primären Algebren; dementsprechend werden hier nur primäre Algebren \mathfrak{A} betrachtet. Ist \mathfrak{w} das Radikal, so ist $L = \mathfrak{A}/\mathfrak{w}$ ein Körper. Indem man den größten in \mathfrak{A} enthaltenen separablen Körper als neuen Grundkörper K annimmt, kann man annehmen, daß L rein inseparabel über K ist. L kann aus K durch sukzessive Adjunktion von p^e -ten Wurzeln erhalten werden; indem man diese so wählt, daß die Exponenten e jeweils maximal sind, erhält man eine eindeutig bestimmte Exponentenreihe $e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_\lambda$. Weiter sei $p^{e_i} = q_i$. Nun wird die Struktur der nilpotenten Algebra \mathfrak{w} näher untersucht. Ist $\mathfrak{w}^r = 0$ und n_i der Rang von $\mathfrak{w}^i \bmod \mathfrak{w}^{i+1}$ ($i = 1, \dots, r-1$), so heißt r der Index von \mathfrak{w} oder von \mathfrak{A} und (n_1, \dots, n_{r-1}) das Geschlecht, insbesondere $n_1 = \delta$ der Defekt von \mathfrak{w} . Als Basiselemente von $\mathfrak{w}^i \bmod \mathfrak{w}^{i+1}$ können Potenzprodukte i -ten Grades der Basiselemente v_1, \dots, v_δ von $\mathfrak{w} \bmod \mathfrak{w}^2$ gewählt werden. Die linearen Abhängigkeiten zwischen diesen Potenzprodukten bestimmen die Struktur der Algebra \mathfrak{w} . Im Fall $\lambda = 0$ (L separabel über K) ist die Struktur von \mathfrak{A} durch die von \mathfrak{w} bereits festgelegt. Im Fall $\lambda > 0$ gilt es, aus \mathfrak{w} und $\mathfrak{A}/\mathfrak{w} = L$ die Algebra \mathfrak{A} zu komponieren. Zu dem Zweck wird ein Repräsentantensystem R für die Restklassen nach \mathfrak{w} ausgewählt; dann haben alle Elemente von \mathfrak{A} die Form $a_0 + \sum a_i w_i$ mit $a_i \in R$, wobei die Basis w_1, \dots, w_m durch Aneinanderreihen der L -Basen von $\mathfrak{w}/\mathfrak{w}^2, \mathfrak{w}^2/\mathfrak{w}^3, \dots$ gefunden wird. Man hat $w_i w_k = \sum d'_{ik} w_l$ mit $d'_{ik} \in R$. Die Strukturkonstanten d'_{ik} definieren eine nilpotente kommutative Algebra \mathfrak{B} über L , die zu \mathfrak{A} zugeordnete Algebra. Ihr Defekt δ heißt Defekt von \mathfrak{A} . Die Algebra \mathfrak{B} hängt im Falle $r > 3$ noch von der Wahl von R und w_1, \dots, w_m ab, aber $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}^3$ ist durch \mathfrak{A} allein bestimmt. Im Fall $\delta = 1$ ist \mathfrak{B} eine Potenzalgebra (w, w^2, \dots, w^{r-1}) und als solche auch eindeutig bestimmt. Erzeugt man L wie oben aus sukzessiven p^e -ten Wurzeln, deren Repräsentanten in R heißen mögen a_1, \dots, a_λ , so bilden die mit $1, w_1, \dots, w_\lambda$ multiplizierten Potenzprodukte von a_1, \dots, a_λ eine Basis für \mathfrak{A} , und die Struktur von \mathfrak{A} ist durch $a_i^{q_i} = \alpha_i + \sum_k f_{ik} w_k$; $w_i w_k = \sum d'_{ik} w_l$ gegeben, wobei die f_{ik} und d'_{ik}

Polynome in a_1, \dots, a_λ sind. In den Fällen $r \leq 3$ und $\delta = 1$ sind die Polynome f_{ik} willkürlich wählbar. Es fragt sich also nur noch, unter welchen Bedingungen zwei so definierte Algebren isomorph sind. Diese Frage wird in den beiden Fällen $r \leq 3$ und $\delta = 1$ ausführlich untersucht. In beiden Fällen ergibt sich auf Grund von einfachen Invarianten eine Einteilung in Typenklassen; eine Reihe von Spezialfällen kann erschöpfend behandelt werden. Zum Schluß wird noch die Frage beantwortet, welche

Algebren als Restklassenringe von algebraischen Funktionenkörpern einer Veränderlichen nach ihren Divisoren (oder speziell als Polynomrestklassenringe) auftreten können. Mit Hilfe der perfekten bewerteten Körper wird dann bewiesen: Jede primäre Algebra vom Defekt $\delta \leq 1$ ist ringsomorph zu einer Potenzalgebra über L . *van der Waerden*.

Schilling, O. F. G.: Units in p -adic algebras. *Amer. J. Math.* **61**, 883—896 (1939).

Eine maximale Ordnung O in einer Divisionsalgebra D über dem p -adischen Zahlkörper k besitzt bekanntlich ein einziges Primideal P . Die Einheitengruppe von O besitzt eine Untergruppe $\{H\}$ von endlichem Index, die Gruppe der Einseinheiten $H \equiv 1(P)$. In $\{H\}$ bilden die Einheiten $H \equiv 1(P^h)$ wieder eine Untergruppe $\{H, h\}$ von endlichem Index. Mit Hilfe eines Repräsentantensystems einer passenden Faktorgruppe $\{H\}/\{H, h\}$ kann man alle Einseinheiten als unendliche (konvergente) Potenzprodukte von endlich vielen Basiseinheiten darstellen. Mit Hilfe der Elementarteilertheorie kann man diesen Satz auch auf die Einheitengruppe einer maximalen Ordnung O_* einer einfachen Algebra $A = D_n$ übertragen. Der Konvergenzbegriff beruht dabei auf einem Umgebungsbegriff, der so definiert wird: Eine Umgebung der 1 ist die Gruppe $\{H, h\}$ der Einheiten $H \equiv 1(P_*)$, wobei P_* das zweiseitige Primideal von O_* ist. Im Sinne dieser Topologie ist die Einheitengruppe lokalkompakt und komplett. Die Topologie kann auch durch eine Pseudobewertung V definiert werden. Für alle a in einer passenden Umgebung von 1 konvergiert die Logarithmenreihe $b = \log a = \log \{1 + (a - 1)\}$, und es ist $a = \exp b$. Die b bilden ein zweiseitiges Ideal in O^* , von endlichem Rang über k , ein Analogon zum Lieschen Ring einer linearen Gruppe. Eine genügend hohe Potenz einer jeden Einseinheit liegt in $\{H, h\}$. Auch die Einheiten einer nichtmaximalen Ordnung lassen sich als unendliche Potenzprodukte aus endlich vielen Basiseinheiten darstellen. *van der Waerden* (Leipzig).

Rinehart, R. F.: An interpretation of the index of inertia of the discriminant matrices of a linear associative algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.* **46**, 307—327 (1939).

Es wird eine hyperkomplexe Deutung des folgenden Borchart-Jacobischen Satzes gegeben: Es seien $f(x)$ ein Polynom n -ten Grades mit reellen Koeffizienten und s_i die Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$. I. Der Rang der Matrix $T = (s_{ik})$ ($i, k = 0, 1, \dots, n-1$; $s_{00} = n$, $s_{ik} = s_{i+k}$) ist gleich der Anzahl verschiedener Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$. II. Die Signatur von T ist gleich der Anzahl der verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ (vgl. z. B. Bieberbach-Bauer, Vorlesungen über Algebra. Teubner 1928. 168 S.). MacDuffee hat bewiesen, daß die Diskriminantenmatrix T_1 des Restklassenringes $\mathfrak{R}[x]/(f(x))$ über dem Körper \mathfrak{R} der reellen Zahlen gerade mit der Borchartschen Matrix T übereinstimmt (dies. Zbl. **1**, 193). Anschließend hat Verf. früher bemerkt, daß der bekannte Satz „Rang des Radikals einer Algebra \mathfrak{A} ist gleich Rang \mathfrak{A} minus Rang $T_1(\mathfrak{A})$ “ (vgl. L. E. Dickson: Algebren und ihre Zahlentheorie. Zürich 1927. S. 108—110) sich im Falle $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}[x]/(f(x))$ zum ersten Teil des Borchart-Jacobischen Satzes spezialisiert (dies. Zbl. **15**, 56). Verf. zeigt in der vorliegenden Arbeit, wie der zweite Teil verallgemeinert werden kann. Es gilt nämlich: Es sei \mathfrak{A} ein hyperkomplexes System über \mathfrak{R} , μ die Anzahl der nichtnegativen charakteristischen Wurzeln der Matrix $T_1(\mathfrak{A})$. Dann ist $\mu = \chi + \varepsilon$, wobei χ der Rang des nilpotenten Unterringes von maximalem Range und ε die Anzahl der unzerlegbaren idempotenten Elemente in einem vollständigen System von \mathfrak{A} ist. Verf. führt den Beweis, indem er \mathfrak{A} schrittweise als einfach, halbeinfach bzw. von beliebiger Struktur voraussetzt. Der erste Teil ist hauptsächlich dem Beweise der folgenden Tatsache gewidmet: der maximale Rang des nilpotenten Unterringes eines einfachen Ringes $\sum_{i,k} D e_{ik}$ (D Schiefkörper, e_{ik} Matrizeinseinheiten) wird durch $\sum_{k \geq i} D c_{ik}$ erreicht. Dies ist aber schon längst bekannt [K. Shoda, *Math. Ann.* **102**, 273—282 (1929); G. Köthe, *Math. Ann.* **103**, 359—363 (1930); vgl. auch J. Levitzki, *Math. Ann.* **105**, 620—627 (1931)]. *T. Tannaka* (Sendai).

Jacobson, N.: Cayley numbers and normal simple Lie algebras of type G . Duke math. J. 5, 775—783 (1939).

Es gibt bis auf Isomorphie über Ω eine einfache Liesche Algebra G der Ordnung 14, falls der Koeffizientenkörper Ω algebraisch abgeschlossen ist (der Koeffizientenkörper habe stets die Charakteristik 0). Ist der Koeffizientenkörper Φ nicht algebraisch abgeschlossen und ist Ω seine abgeschlossene Hülle, so heißt die Liesche Algebra \mathfrak{L} vom Typus G , falls ihre Erweiterung \mathfrak{L}_Ω gleich G ist. E. Cartan [vgl. Ann. Ecole norm. 31, 298 (1914)] bewies, daß G die Menge $\mathfrak{D}(\mathfrak{C})$ aller Ableitungen des Cayleysystems \mathfrak{C} über Ω ist. Dieses Resultat wird folgendermaßen verallgemeinert: Eine Liealgebra \mathfrak{L} über Φ ist dann und nur dann vom Typus G , wenn sie der Ring $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ der Ableitungen einer verallgemeinerten Cayleyalgebra \mathfrak{A} über Φ ist (vgl. M. Zorn, Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9, 395—402 (1933); dies. Zbl. 7, 54]. Umgekehrt ist $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ für jedes \mathfrak{A} eine Liealgebra vom Typus G . Zwei Cayleyalgebren (über demselben Φ) sind dann und nur dann isomorph, wenn die zugehörigen Liealgebren isomorph sind. Ferner sind die Automorphismengruppen von \mathfrak{A} und $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ isomorph. — Als Vorbereitung werden einige Sätze über die verallgemeinerten Cayleyalgebren \mathfrak{A} bewiesen: Zwei solche Algebren sind isomorph, wenn ihre Normenformen äquivalent sind. Jeder Isomorphismus zwischen zwei Quaternionenteilalgebren eines \mathfrak{A} kann zu einem Automorphismus von \mathfrak{A} erweitert werden.

G. Köthe (Münster i. W.).

Dauenhauer, Anatol: Berechnung von maximalen Ordnungen in einfachen kubischen Algebren mit rationalem Zentrum. Halle-Wittenberg: Diss. 1939. 23 S.

Es sei A eine kubische Algebra über dem rationalen Zahlkörper und $D = d^6 = \prod p_i^6$ ihre Diskriminante. Es gibt dann eine Primzahl $l \equiv 1 \pmod 3$ derart, daß eine verschränkte Produktdarstellung $A = (\prod p_i^{a_i}, K_l, S)$ besteht. Dabei sind die $a_i = 1$ oder 2, und K_l ist der zyklische Teilkörper des l -ten Kreiskörpers mit dem erzeugenden Automorphismus S . Verf. gibt ein Verfahren an, aus der Hauptordnung von K_l eine Maximalordnung von A durch sukzessive Erweiterung zu bestimmen, und führt dies Verfahren tabellarisch für alle $d < 100$ durch. S. dazu auch schon Hull, dies. Zbl. 12, 337.

H. Hasse (Göttingen).

Carlitz, L.: Some sums involving polynomials in a Galois field. Duke math. J. 5, 941—947 (1939).

Es werden Summen berechnet, die sich über alle Polynome M in x von gegebenem Grad $\deg M$ mit Koeffizienten aus einem Galois-Feld $GF(q)$ erstrecken. Es wird gesetzt

$$\begin{aligned} F_k &= (x^{q^k} - x)(x^{q^k} - x^q) \dots (x^{q^k} - x^{q^{k-1}}); & F_0 &= 1, \\ L_k &= (x^{q^k} - x)(x^{q^{k-1}} - x) \dots (x^q - x); & L_0 &= 1. \end{aligned}$$

Die Hauptergebnisse lauten:

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum_{\deg M = m} M^{-1} &= \frac{(-1)^m}{L_m}, & (2) \quad \sum_{\deg M = m} M^{q^k - 1} &= \begin{cases} 0 & (k < m), \\ (-1)^m F_k L_m^{-1} F_{k-m}^{-q^m} & (k \geq m), \end{cases} \\ (3) \quad \sum_{\deg M = m} M^{-q^k + 1} &= L_{k+m-1} L_{k-1}^{-1} L_m^{-q^k}, & (4) \quad \sum_{\deg M \leq m} M^{-q^k + 1} &= L_{k+m} L_k^{-1} L_m^{-q^k}. \end{aligned}$$

Zum Beweis von (2) wird mit einer neuen Unbestimmten t

$$\psi_m(t) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} F_m F_j^{-1} L_{m-j}^{-q^j} t^{q^j}$$

gebildet und die Summe $\sum M^{-1} \psi_k(M)$ berechnet, die sich für $u = 1$ aus der allgemeinen Formel

$$\sum_{\deg M = m} \frac{\psi_k(M) u}{M} = (-1)^m F_k L_m^{-1} F_{k-m}^{-q^m} \psi_{k-m}^{q^m}(u)$$

ergibt. Ähnlich wird (3) bewiesen. Aus (3) folgt (4) durch Summation.

van der Waerden (Leipzig).

Zahl- und Funktionenkörper:

Bauer, Michael: Über zusammengesetzte relativ Galoissche Zahlkörper. Acta Litt. Sci. Szeged 9, 206—211 (1940).

Bauer, Michael: Über die Zusammensetzung algebraischer Zahlkörper. Acta Litt. Sci. Szeged 9, 212—217 (1940).

Deckt sich inhaltlich mit den in dies. Zbl. 22, 109 besprochenen Arbeiten.

Hasse (Göttingen).

Aral, Hasan: Simultane diophantische Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern. München: Diss. 1939. 35 S.

Es werden Sätze über die gleichzeitige Approximation von komplexen Zahlen abgeleitet. Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ beliebige in bezug auf $k(i\sqrt{D})$ linear unabhängige Zahlen, so haben die Ungleichungen

$$(1) \quad \left| \alpha_\nu - \frac{x_\nu}{x_n} \right| < \frac{\gamma}{|x_n|^{\frac{n}{n-1}}} \quad (\nu = 1, \dots, n-1)$$

unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x_1, \dots, x_n aus $k(i\sqrt{D})$. Dabei ist

$$\gamma = \frac{n-1}{n} \left(\frac{(2n-1) D^{\frac{n}{2}} 2^{\mu n}}{n \pi^n} \right)^{\frac{1}{2(n-1)}}$$

[$\mu = 2$ für $D \equiv 3 \pmod{4}$, $\mu = 1$ für $D \equiv 1 \pmod{4}$]. Diesen Satz haben für $D = 1$ Minkowski (Geometrie der Zahlen, § 39), für beliebiges D , aber $n = 2$ Hofreiter (dies. Zbl. 16, 9) bewiesen. — Es sei k_1 ein Relativkörper n -ten Grades über dem imaginär-quadratischen Körper $k(i\sqrt{D})$. Es seien $\omega_1, \dots, \omega_n$ ganze Zahlen aus k_1 , deren Relativediskriminante

den kleinstmöglichen Wert Δ (Grundzahl) hat. Ist $\gamma < \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}}$, so gibt es in k_1 Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, so daß (1) höchstens endlich viele Lösungen aus $k(i\sqrt{D})$ hat (s. auch Hofreiter, dies. Zbl. 13, 53). — Die Grundzahl Δ wird für relativ quadratische und für relativ kubische Körper abgeschätzt und zum Teil auch ermittelt. Im ersten Fall (rel. quadratisch) ergeben sich bekannte Sätze (s. Hofreiter, dies. Zbl. 16, 9 und Peron, dies. Zbl. 7, 338).
Hofreiter (Wien).

Gut, Max: Folgen von Dedekindschen Zetafunktionen. Mh. Math. Phys. 48, 153—160 (1939).

$k_1 \subset k_2 \subset k_3 \subset \dots$ sei eine aufsteigende Folge von endlichen algebraischen Zahlkörpern k_i der Grade n_i ; es werde angenommen, daß, wenn $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ die Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge bezeichnen, die k_i -Primfaktoren von p_1, p_2, \dots, p_i im Körper k_{i+1} voll zerfallen. $k = \lim_{i \rightarrow \infty} k_i$ ist dann ein unendlicher Zahlkörper, in dem jedes Primideal endlichen Absolutgrad und endliche Absolutordnung hat. $\zeta_i(s)$ sei die Zetafunktion von k_i und $\sqrt[n_i]{\zeta_i(s)}$ in $\Re s = \sigma > 1$ der für $s > 1$

reelle Zweig. Dann konvergiert $\sqrt[n_i]{\zeta_i(s)}$ in jeder Halbebene $\sigma \geq \sigma_0 > 1$ gleichmäßig gegen eine in $\sigma > 1$ reguläre und nullstellenfreie Funktion $Z(s)$. Das Kompositum k aller absolut zyklischen Körper eines festen ungeraden Primzahlgrades q kann als Limes einer Folge k_i der angegebenen Art dargestellt werden, und in diesem Fall wird

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[n_i]{\zeta_i(s)} = \sqrt[q]{\zeta^q(qs) \left(1 - \frac{1}{q^{qs}}\right)^{q-1} \prod_{p \equiv 1 \pmod q} \left(1 - \frac{1}{p^{qs}}\right)^{q-1}},$$

weil sich zeigt, daß ein Primideal von k den Absolutgrad 1 hat und die Absolutordnung q oder 1, je nachdem es in q oder $p \equiv 1 \pmod q$ aufgeht oder nicht. Für das Kompositum k aller absolut quadratischen Körper gilt in ähnlicher Weise

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt[n_i]{\zeta_i(s)} = \sqrt[8]{2^{-2s}(2^{2s} - 1)\zeta^2(2s)} = Z_2(s).$$

Jedes ungerade Primideal von k hat den Absolutgrad 2 und die Absolutordnung 2, jeder Primfaktor von 2 dagegen den Grad 2 und die Ordnung 4. Für $\xi_2(s) = Z_2^s(s) \frac{\Gamma^2(s)}{2^{2s}-1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s}$ gilt $\xi_2\left(\frac{1}{2} - s\right) = \xi_2(s)$. Deuring (Jena).

Zahlentheorie:

Abdulla, Gul, and Lal Bahadur: On a problem of arrangements. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 9, 103 (1939).

Chowla, S.: A new solution of the 10—21 problem. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 9, 104 (1939).

„Die Zahlen $1, 2, \dots, 2n+1$ sind auf n Weisen im Kreise anzuordnen, so daß bei verschiedenen Anordnungen keine Zahl dieselben Nachbarn hat.“ Abdulla und Bahadur geben für $2n+1 = 9, 21$ oder Primzahl eine Lösung dieser Aufgabe an. Für $2n+1 = 21$ teilt Chowla eine zweite, wirklich neue Lösung mit. Ernst Witt.

Sprague, R.: Zur Theorie der Umfüll-Aufgaben. Jber. Deutsch. Math.-Vereinigung. 49, Abt. 2, 65—73 (1940).

In seinem Buch „Mathematische Unterhaltungen und Spiele“, Bd. I, 2. Aufl., Leipzig u. Berlin 1910, S. 105ff., zeigt W. Ahrens, daß sich die Flüssigkeitsmenge $a = 2a'$ eines vollen Gefäßes A mit Hilfe zweier Gefäße B und C mit den Kapazitäten b und c [a', b, c ganzzahlig, $a > b > c$ und $(b, c) = 1$] durch Umfüllen halbieren läßt, wenn $b + c - 2 \leq a \leq 2b + 2c$ ist. Die rechte Ungleichung ist notwendig, die linke nicht. Verf. beweist hierzu den folgenden Satz: Ist für ganze $p, q \geq 0$ $|pb - qc| = 1$ und steht $\frac{p+q}{b+c}$, wenn man es der Größe nach in die zu $b+c-a=k$ gehörige Farey-Reihe einordnet, neben einem reduzierten Bruch $\frac{g}{k}$ mit $g \equiv p+q \pmod{2}$, so ist die Halbierung möglich, in anderen Fällen nicht. Molsen (Berlin).

Rosser, Barkley, and R. J. Walker: The algebraic theory of diabolic magic squares. Duke math. J. 5, 705—728 (1939).

Die Elemente eines Quadrats S_n , d. h. einer quadratischen Matrix n -ter Ordnung, seien A_{ij} oder $A(i, j)$. Eine lineare Kombination von Elementen $\sum_{x=1}^n \alpha_x A(i_x, j_x)$ heißt eine Kon-

figuration. S_n läßt die Konfiguration zu, wenn für alle i und j $\sum_{x=1}^n \alpha_x A(i + i_x, j + j_x) = N \sum \alpha_x$

ist. N ist gleich $\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}$, außer wenn $\sum \alpha_x = 0$ ist; dann ist N unbestimmt. Die Kon-

figuration $\sum_{x=1}^n A(i + ax, j + bx)$, wo $(a, b, n) = 1$ ist, wird mit $P(i, j; a, b)$ bezeichnet und

heißt ein Pfad („path“). Sind i, j beliebig, so wird kurz $P(a, b)$ geschrieben. Ein Quadrat mit den Pfaden $P(0, 1), P(1, 0), P(1, 1)$ und $P(1, -1)$, in dem also alle Zeilen, alle Spalten, die Diagonalen und alle Parallelen zu ihnen dieselbe Summe ergeben, heißt ein diabolisches oder Teufelsquadrat [nach W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, 2. Aufl., 2, 40 (1918), ein pandiagonales Quadrat]. Ein Quadrat, das alle Konfigurationen $A_{ij} + A_{kl} - A_{il} - A_{kj}$ zuläßt, heißt primitiv. Ist d ein Teiler von n , so heißt die Konfiguration

$\sum_{x,y=1}^{n/d} A(i + dx, j + dy)$ ein Gitter und wird mit $L(i, j; d)$, bei beliebigen i, j mit $L(d)$ bezeichnet.

Ist $T = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ und $|T|$ teilerfremd zu n , so heißt das Quadrat B mit $B(ai + cj, bi + dj)$

$= A(i, j)$ die Transformierte von A durch T . T heißt regulär, wenn $abcd(a^2 - b^2)(c^2 - d^2)$ zu n teilerfremd ist. — Mit Hilfe dieser Begriffe wird die Theorie der diabolischen Quadrate aufgebaut und eine große Menge von Ergebnissen gewonnen, die sich nicht in kurzen Worten wiedergeben lassen. Insbesondere wird eine Gruppe von Transformationen aufgestellt, die jedes diabolische Quadrat wieder in ein solches überführen. Für n gleich einer Primzahl ≥ 7 ist dies die größte Gruppe dieser Art. Die Theorie wird schließlich auf die Quadrate, deren Elemente $1, 2, \dots, n^2$ sind, angewendet. Für $n = 5$ gibt es 28800 solcher Quadrate.

L. Schrutka (Wien).

Paradine, C. G.: Apollonian numbers. Math. Gaz. 23, 451—455 (1939).

L'Autore indica un semplice procedimento per risolvere in numeri interi a, b, c, x („numeri apolloniani“) l'equazione (già considerata da Bachet): $a^2 + x^2 = 2(b^2 + c^2)$, cui si perviene quando si vuole determinare un triangolo a lati interi $2a, 2b, 2c$ e a mediana x relativa al

lato 2a, pure intera. I numeri pitagorici si presentano come casi particolari dei numeri apolloniani. L'A. illustra con esempi il suo procedimento e fa delle considerazioni a riguardo del problema di trovare i triangoli coi lati e le mediane espressi tutti da numeri interi, problema anche questo ben noto, e risolto già da Eulero [cfr. anche H. Schubert, *Auslese Unterrichts und Vorlesungspraxis* 2, 68—92 (1905)].

M. Cipolla (Palermo).

Constantinescu, G. G.: Die ganzzahligen Lösungen der Gleichung $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j = 0$. Bol. mat. 12, 231—236 (1939) [Spanisch].

Unter Bezugnahme auf eine von I. B. Florescu (dies. Zbl. 3, 338; 10, 15; 8, 147) entwickelte Methode, um unendlich viele ganzzahlige Lösungen der ganzzahligen

Gleichung $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j = 0$ zu erhalten, gibt Verf. ein Verfahren an, um noch all-

gemeinere ganzzahlige Lösungen dieser Gleichung zu erhalten. Mittels der Transformation $x_h/x_n = X_h$ ($h = 1, 2, \dots, n-1$) führt Verf. die Aufgabe auf die Bestimmung der rationalen Lösungen einer quadratischen Gleichung in $n-1$ Unbekannten zurück, und mittels geometrischer und teils analytischer Überlegungen zeigt er, wie man ganzzahlige Lösungen der genannten Gleichung als Funktionen von $n(n-1)/2$ willkürlichen ganzzahligen Parametern herstellen kann.

M. Cipolla (Palermo).

Nagell, Trygve: Über die gleichzeitige Lösbarkeit gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades. I. Norske Vid. Selsk., Forh. 11, 113—116 (1938).

Nagell, Trygve: Über die gleichzeitige Lösbarkeit gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades. II. Norske Vid. Selsk., Forh. 11, 161—164 (1939).

Verf. beweist mit elementaren Hilfsmitteln einige Sätze über die gleichzeitige Lösbarkeit gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades. Als Beispiel sei angeführt: Ist A eine Zahl aus dem Körper Ω , aber kein Kubus in Ω , und ist die Gleichung $x^3 + y^3 = A$ in Zahlen x, y aus Ω lösbar, so ist auch die Gleichung $uv(u+v) = A$ in Zahlen u, v aus Ω lösbar und umgekehrt. Beide Gleichungen haben gleichzeitig unendlich viele Lösungen. (Der Satz ist nicht bewiesen für Körper der Charakteristik 3; d. Ref.) — Im Anschluß an einen ähnlichen Satz beweist Verf. folgenden Äquivalenzsatz: Besitzt die Kurve $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$ ($a, b, c \neq 0$ aus Ω) einen rationalen Punkt, so ist sie in Ω äquivalent der Kurve $4x^3 - 27a^2b^2c^2 = y^2$. H. L. Schmid (Berlin).

Linnik, U. V.: On certain results relating to positive ternary quadratic forms. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 453—470 (1939).

Der positiv ternären quadratischen Form $F(x, y, z)$ ordne man eine verallgemeinerte Quaternionenalgebra $\mathfrak{A}_F = \{1, i_1, i_2, i_3\}$ (Hermiteische Algebra) zu. Die Zahlen $X = \xi + xi_1 + yi_2 + zi_3$ werden Hermiteische Zahlen genannt. Ist der Realteil 0, so heißt $xi_1 + yi_2 + zi_3 = L$ Vektor. Es ist $L^2 = -F(x, y, z)$. Das Problem der Darstellung einer Zahl m durch $F(x, y, z)$, (1) $m = F(x, y, z)$, ist äquivalent mit der Aufgabe, die Gleichung (2) $m = -L^2$ in ganzzahligen Hermiteischen Vektoren zu lösen. Die Gleichung (1) stellt ein Ellipsoid dar. Die linearen Transformationen eines Ellipsoids in sich hängen eng mit der Transformation von Hermiteischen Vektoren zusammen. Ist L eine beliebige Lösung von (2), b ganz rational, so ist der Fall wichtig, wo $b + L = P \cdot Q$ ist, P und Q ganzzahlige Hermiteische Zahlen sind und $N(P)$ (= Norm von P) zu $N(Q)$ relativ prim ist. Man betrachtet nun die binäre Form $f(x, y) = N(P)x^2 + 2bxy + N(Q)y^2$. Die Anzahl der Klassen solcher Formen steht in engem Zusammenhang mit der Anzahl der Lösungen von (1). Es ergeben sich Sätze über die Darstellung von Zahlen durch ternäre Formen, die einem Geschlecht mit mehreren Klassen angehören.

Hofreiter (Wien).

Linnik, J.: On the representation of large numbers by positive ternary quadratic forms. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 575—576 (1939).

Verf. behauptet: Mit einer früher benutzten Methode (dies. Zbl. 22, 7) ergeben sich noch 2 weitere Sätze über die Darstellung hinreichend großer Zahlen durch gewisse positive ternäre quadratische Formen. Die Beweise werden nur angedeutet.

Hofreiter (Wien).

James, R. D.: Integers which are not represented by certain ternary quadratic forms. *Duke math. J.* 5, 948—962 (1939).

Es wird der folgende Satz bewiesen: Es sei die negative ganze Zahl d geschrieben in der Form $-2^b S^2 h$, wo S und h ungerade sind, h quadratfrei. Dann läßt sich jede hinreichend große ganze Zahl N in der Form darstellen $N = u^2 + epH^2M$, wo u ganz ist und p eine Primzahl mit $(d/p) = -1$ ist; jeder Primteiler von H geht in d auf, für jeden Primteiler q von M gilt $(d/q) = 1$, und es ist $e = 1$, abgesehen von den folgenden drei Fällen, in denen $e = 2$ ist: 1. b ungerade, $h|N$, $h \equiv 3 \pmod{4}$, $N \equiv 6 \pmod{8}$; 2. b gerade, $h|N$, $h \equiv 1 \pmod{4}$, $N \equiv 2 \pmod{4}$; 3. b ungerade, $h|N$, $h \equiv 1 \pmod{4}$, $N \equiv 2 \pmod{8}$. Hieraus folgen Resultate über die Nichtdarstellbarkeit von hinreichend großen Zahlen durch gewisse ternäre quadratische Formen. Die Beweismethode ist eine Anwendung des Siebverfahrens von Viggo Brun.

T. Nagell (Uppsala).

Rao, K. Sambasiva: On a particular representation of integers as sums of k -th powers. *J. Indian Math. Soc.*, N. s. 3, 262—265 (1939).

Verf. betrachtet die Darstellung einer ganzen positiven Zahl x in der Form $x = x_1^k + x_2^k + \dots + x_s^k$, wo die ganzen Zahlen x_1, x_2, \dots, x_s durch die folgenden Ungleichungen eindeutig bestimmt sind: $(x_1 + 1)^k > x \geq x_1^k$; $(x_2 + 1)^k > x - x_1^k \geq x_2^k$; ...; $(x_s + 1)^k > x - x_1^k - x_2^k - \dots - x_{s-1}^k = x_s^k$. Es bezeichne $S_k(x)$ die Anzahl s der notwendigen k -ten Potenzen, wenn k und x gegeben sind. Dann werden die folgenden Sätze bewiesen: 1. Für alle $x > x_0$ gilt

$$S_k(x) < c_1 \log \log x.$$

2. Es gibt unendlich viele x , für welche

$$S_k(x) > c_2 \log \log x.$$

c_1 und c_2 bedeuten hier positive, von x unabhängige Konstanten.

T. Nagell.

Pillai, S. S.: A note on the paper of Sambasiva Rao. *J. Indian Math. Soc.*, N. s. 3, 266—267 (1939).

Beweis der folgenden Verschärfung der vorstehend besprochenen Resultate von Sambasiva Rao

$$\text{Max } S_k(x) = \frac{\log \log k}{\log k/(k-1)} + M(k) + O(k \log k).$$

wo $M(k) = \text{Max } S_k(x)$ für $1 \leq x \leq (2k)^k$ ist; die Konstante von O ist unabhängig von k und x .

T. Nagell (Uppsala).

Derry, D.: Remarks on a conjecture of Minkowski. *Amer. J. Math.* 62, 61—66 (1940).

Verf. betrachtet den Grenzfall des Minkowskischen Linearformensatzes [Lit. im Bericht „Diophantische Approximationen“ des Ref. (dies. Zbl. 12, 396), speziell Kap. II] in dem speziellen Fall, daß die Determinante $= \pm 1$ ist und sämtliche Koeffizienten rationale Zahlen sind, sogar mit Nennern, welche reine Potenzen einer einzigen vorgegebenen Primzahl darstellen. Mittels der Theorie der Normalreihen endlicher Abelscher Gruppen werden dann zu der Minkowskischen Vermutung äquivalente Aussagen hergeleitet.

J. F. Koksma (Amsterdam).

Perron, Oskar: Über lückenlose Ausfüllung des n -dimensionalen Raumes durch kongruente Würfel. *Math. Z.* 46, 1—26 (1940).

Es seien $\xi_\nu = \sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu} x_\mu$ ($\nu = 1, \dots, n$) n Linearformen mit reellen Koeffizienten und der Determinante 1. Minkowski vermutete, daß es stets ganze Zahlen $x_1, \dots, x_n \neq 0, \dots, 0$ gibt, so daß $|\xi_\nu| < 1$ ($\nu = 1, \dots, n$) ist, abgesehen von dem Fall, wo man die ξ_ν durch eine unimodulare Transformation auf die Gestalt $\xi_\nu = a_{\nu 1} x_1 + \dots + a_{\nu, \nu-1} x_{\nu-1} + x_\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$) bringen kann. Im Ausnahmefall hat man dann eine lückenlose Ausfüllung des Raumes durch kongruente Würfel, deren Mittelpunkte ein Gitter bilden. Es gelang bisher nur, die Vermutung für $n = 2, \dots, 8$ zu bestätigen, sofern die für

$n = 7$ und 8 geführten schwierigen geometrischen Beweise wirklich stichhaltig waren. Keller hat die Forderung der gitterförmigen Anordnung der Mittelpunkte fallen gelassen und nur die Lückenlosigkeit verlangt. Er hat vermutet, daß auch dann zwei Würfel da sein müssen, die eine ganze $(n - 1)$ -dimensionale Seitenfläche gemein haben. Wenn die Vermutung Kellers richtig ist, so ergibt sich daraus im Fall gitterförmiger Anordnung der Mittelpunkte die Richtigkeit der Minkowskischen Vermutung. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Kellerschen Vermutung. Sie hat gegenüber anderen Arbeiten den Vorzug, daß sie arithmetisch ist und anschauliche Überlegungen im R_n vermeidet. Das Problem wird (wie noch genauer dargelegt wird) auf eine algebraische Aufgabe zurückgeführt, deren Lösung nach endlich vielen Schritten erzwungen werden kann. Der wesentliche Fortschritt gegenüber früheren Untersuchungen besteht darin, daß ein Verfahren angegeben wird, mit dem man für jeden festen Wert n nach endlich vielen Versuchen entscheiden kann, ob die Kellersche Vermutung wahr oder falsch ist. Unter einem Konglomerat werde eine Menge von 2^n Würfeln mit den Mittelpunkten $k_1 + \varphi_{k_1, \dots, k_n}^{(1)}, \dots, k_n + \varphi_{k_1, \dots, k_n}^{(n)}$ (1) verstanden, wobei die k_v unabhängig voneinander die Werte 0 und 1 annehmen, $0 \leq \varphi_{k_1, \dots, k_n}^{(v)} < 1$ (2) gilt und die Mittelpunkte von je zwei Würfeln wenigstens eine ganzzahlige von 0 verschiedene Koordinatendifferenz haben. Die 2^n Würfel mit den Mittelpunkten (1), für die auch (2) gilt, bilden dann und nur dann ein Konglomerat, wenn die $n \cdot 2^n$ Größen $\varphi_{k_1, \dots, k_n}^{(v)}$ dem System von $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ Gleichungen $\prod_v (\varphi_{k_1, \dots, k_n}^{(v)} - \varphi_{l_1, \dots, l_n}^{(v)}) = 0$ (3) genügen. Ein Konglomerat kann stets

durch Hinzufügung von Würfeln zu einer lückenlosen Ausfüllung des Raumes ergänzt werden. Perron vermutet: Unter den 2^n Würfeln eines Konglomerates gibt es wenigstens zwei, die eine ganze $n - 1$ -dimensionale Seitenfläche gemein haben (gibt es wenigstens ein Zwillingsspaar). Die Vermutungen Kellers und P.s sind äquivalent. Letztere hat aber den Vorteil, daß sie sich nur auf endlich viele Würfel bezieht. Der Tatbestand, daß in dem Konglomerat (1) ein Zwillingsspaar vorkommt, läßt sich arithmetisch so formulieren: Die $\varphi_{k_1, \dots, k_n}^{(v)}$ genügen dem System von $(n - 1) \cdot 2^{n-1}$ Gleichungen:

$$(4) \quad \prod_{k_2 \dots k_n} (\varphi_{1 k_2 \dots k_n}^{(v_1)} - \varphi_{0 k_2 \dots k_n}^{(v_1)}) \cdot \prod_{k_1 k_3 \dots k_n} (\varphi_{k_1 1 k_3 \dots k_n}^{(v_2)} - \varphi_{k_1 0 k_3 \dots k_n}^{(v_2)}) \dots \\ \cdot \prod_{k_1 \dots k_{n-1}} (\varphi_{k_1 \dots k_{n-1} 1}^{(v_n)} - \varphi_{k_1 \dots k_{n-1} 0}^{(v_n)}) = 0.$$

Die Frage, ob die Vermutung P.s bzw. Kellers zutrifft, wird damit auf die Frage zurückgeführt, ob das Gleichungssystem (3) das Gleichungssystem (4) zur Folge hat. Das ist eine rein algebraische Frage, die nach endlich vielen Schritten entschieden werden kann. Praktisch kommt man allerdings damit kaum für $n = 3$ durch, denn man hätte zu untersuchen, ob ein System von 14 Gleichungen ein System von $2^{12} = 4096$ Gleichungen zur Folge hat. Durch geschickte zusätzliche Bemerkungen kommt aber P. verhältnismäßig rasch durch. Zuletzt gibt P. noch kürzere Beweise für $n = 2$ und 3 , in denen nicht das Hauptergebnis der Arbeit benutzt wird, sondern nur der hier arithmetisch bewiesene Kellersche Satz: Die Mittelpunkte von zwei verschiedenen Würfeln einer lückenlosen Ausfüllung des Raumes haben wenigstens eine ganzzahlige von 0 verschiedene Koordinatendifferenz. Hofreiter (Wien).

Khintchine, A.: Sur la sommation des suites d'entiers positifs. Rec. math. Moscou. N. s. 6, 161—166 u. franz. Zusammenfassung 166 (1939) [Russisch].

Es sei a_i eine Folge ganzer Zahlen, $\varphi_i(x)$ die Anzahl der $0 < a_i \leq x$, $\Phi(x)$ die Anzahl aller $0 < \sum \varepsilon_i a_i \leq x$ ($\varepsilon_i = 0$ oder $= 1$) und $D(\varphi_i)$ die untere Grenze von $\varphi_i(n)/n$ ($n = 1, 2, \dots$). Für den bekannten Satz des Verf.: Aus $D(\varphi_i) = D(\varphi_j)$ und $\sum_1^h D(\varphi_i) < 1$ folgt $D\left(\sum_1^h \varphi_i\right) \geq \sum_1^h D(\varphi_i)$, wird ein wesentlich einfacherer Beweis gegeben.

Der zu beweisende Hauptsatz, aus dem sich der vorher erwähnte Satz unmittelbar ablesen läßt, lautet: Aus $0 < \alpha < 1/h$, $\min_{1 \leq n \leq N} \{\varphi_1(n) - \alpha(n + 1) + 1\} = \lambda$ und

$\varphi_i(n) \geq \alpha n - (h-i)/h$ ($i = 2, 3, \dots, h; 1 \leq n \leq N$) folgt $\Phi(N) \geq h \alpha N$, wenn $\lambda \geq 1/h - \alpha$ bzw. $\geq h \alpha (N+1) - 1 + h \lambda$, wenn $0 \leq \lambda < 1/h - \alpha$. V. G. Avakumović.

Lehmer, D. H.: On the remainders and convergence of the series for the partition function. Trans. Amer. Math. Soc. **46**, 362—373 (1939).

For the remainders $R_i(n, N)$, ($i = 1, 2$) of the series of Hardy, Ramanujan and Rademacher (this Zbl. **17**, 55, 56) for the partition function $p(n)$, the author proves

$R_i(n, \alpha n^{\frac{1}{2}}) = O(n^{-\frac{1}{2}} \log n)$. By a more precise treatment of $T(k) = \sum_{\nu=1}^k \tau(\nu) > k \log k$

and (for $k > 12$) $\leq k(\log k + b_{16})$, b_{16} being a certain constant, he obtains a superior limit for R_i . $A_k(n)$, a complicated sum of 24 k -th roots of unity defined in the previous paper, is proved to be an unbounded function for every $n > 0$, which is an improvement of a theorem by the author (this Zbl. **18**, 107). Hence $R_1(n, N)$ does not oscillate between fixed limits. The absolute value of the k -th term of the Ramanujan series is $> 1 : k^2$ for an infinity of k 's. N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Atkinson, F. V.: A summation formula for $p(n)$, the partition function. J. London Math. Soc. **14**, 175—184 (1939).

Die bekannte Funktionalgleichung der Funktion $f(x) = \prod (1 - x^n)^{-1} = \sum_0^\infty p(n) x^n$, die in der Form

$$\sqrt{\frac{h+z}{z}} \exp \left[\frac{\pi h z}{12(h+z)} \right] f \left(\exp \left[-2\pi \frac{h z}{h+z} \right] \right) = \sqrt{z} \exp \left[\pi/12 (1/z + 1/h) \right] \\ \times f \left(\exp \left[-2\pi (1/z + 1/h) \right] \right)$$

gebraucht wird, wird mit $\exp[2\pi x z] z^{-k-1}$ ($k > -1/2$) multipliziert und über $(1-i\infty, 1+i\infty)$ integriert. Wird hier f als Potenzreihe geschrieben und die Integration beiderseits gliedweise ausgeführt, so ergibt der Grenzübergang $h \rightarrow \infty$ folgenden Satz:

Sei $x > 1/24$ und $x + 1/24$ keine ganze Zahl, dann ist $\sum_{n-1/24 < x} p(n) \frac{\{2\pi(x - n + 1/24)\}^k}{\Gamma(k+1)}$

gleich der A -Summe von $\sum_0^\infty p(n) \left(\frac{x}{n-1/24} \right)^{k/2-1/4} J_{k-1/2} \{4\pi \sqrt{x(n-1/24)}\}$. — Dar-

aus wird gefolgert: Sei $f(x + 1/24)$ differenzierbar im abgeschlossenen Intervall (a, b) ($b > a > 1/24$) und weder $a + 1/24$ noch $b + 1/24$ eine ganze Zahl. Dann ist $\sum_{a < n-1/24 < b} p(n) f(n)$ gleich der A -Summe von

$$\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_0^\infty p(n) \int_a^b f(x + 1/24) \frac{d}{dx} \{x^{-1/2} \cos 4\pi \sqrt{x(n-1/24)}\} dx.$$

V. G. Avakumović (Beograd).

Corput, J. G. van der: Sur quelques fonctions arithmétiques élémentaires. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **42**, 859—866 (1939).

Corput, J. G. van der: Sur un lemme de M. Vinogradow. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **42**, 867—871 (1939).

In der ersten Arbeit betrachtet Verf. solche „multiplikative“ arithmetische Funktionen $f(n)$, daß das für ein ganzes $\lambda > 0$ mittels der Funktion

$$g(p^e) = f(p^e) - \binom{\lambda}{1} f(p^{e-1}) + \dots + \binom{\lambda}{e} f(1)$$

gebildete Produkt

$$\prod_p \left(1 + \frac{|g(p)|}{p} + \frac{|g(p^2)|}{p^2} + \dots \right)$$

konvergiert. Es gilt alsdann für $s > 1$ natürlich

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{f(n)}{n^s} = (\zeta(s))^\lambda Z(s) \quad \text{mit} \quad Z(s) = \prod_p \left(1 + \frac{g(p)}{p^s} + \frac{g(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right).$$

Verf. zeigt mit einer „elementaren“ Methode, daß für $x \rightarrow \infty$ gilt:

$$\sum_{n \leq x} f(n) \sim \frac{Z(1)}{(\lambda-1)!} x (\log x)^{\lambda-1}.$$

Besonders hervorgehoben wird dabei der Fall der Funktion $\tau'_*(n)$, wo $\tau_*(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n als Produkt von κ pos. ganzen Faktoren bedeutet. Aber hier sei nun bemerkt, daß für diese Funktion eine viel schärfere Abschätzung schon bekannt ist (Z. Suetuna, dies. Zbl. 2, 123—124). — In der zweiten Arbeit macht Verf. aufmerksam auf einen Fehler von Vinogradow bez. der Größenordnung der Summe $\sum \tau_3^2(n)$. Vinogradow hat ja vor kurzem eine Abschätzung der Summe $\sum_y \omega(y) \sum_x e^{2\pi i m f(xy)}$

mit $f(u) = \frac{1}{2} \alpha u^2 + \beta u$ (m ganz) hergeleitet (dies. Zbl. 19, 249). Verf. betrachtet eine allgemeinere Summe der Gestalt

$$S_m = \sum_y \omega(y) \sum_x \psi(x) e^{2\pi i m f(xy)}$$

für solche Zahlen α , für die es ein $\tau \geq 1$ gibt, so daß $\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{\tau}{q^2}$ mit $(a, q) = 1$. Er leitet für diese Summe eine feine Abschätzung her. Z. Suetuna (Tokyo).

Kuhn, Pavel: Neuer Beweis einer Formel für die Summe der Möbiusfaktoren und einer Formel für die Riemannsche Funktion $f(x)$. Norske Vid. Selsk. Forh. 12, Nr 2, 5—8 (1939).

Es bedeute, wie üblich, $[x]$ das größte Ganze von x , dagegen $\{x\}$ die Anzahl der natürlichen Zahlen s mit $2 \leq s \leq x$, also $\{x\} = 0$ für $x < 2$ und $\{x\} = [x] - 1$ für $x \geq 2$. Verf. zeigt zunächst: Gegeben sei eine Treppenfunktion $g(x) = g([x])$ mit $g(0) = 0$ und die zugehörige Summenfunktion $G(x) = \sum_{n=1}^{[x]} g(x/n)$, wo als obere Grenze der Summe ohne weiteres ∞ statt $[x]$ genommen werden kann. Es ist dann $g(x) = G(x)$

$-\sum_{n=2}^{\infty} G(x/n) + \sum_{m,n=2}^{\infty} G(x/mn) - \dots$. Hieraus folgt ein sehr einfacher Beweis folgender Sätze von V. Brun [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 33, 81—96 (1924); Norske Vid. Selsk., Skr. 12, 150 (1935); 7. skand. math. Kongr. 1930, 38—54]: 1. Die Summenfunktion $\sigma(x) = \sum_{r=1}^{[x]} \mu(r)$ der bekannten Möbiusschen μ -Funktion erfüllt

$$\sigma(x) = 1 - \{x\} + \sum_{n=2}^{\infty} \{x/n\} - \sum_{m,n=2}^{\infty} \{x/mn\} + \dots$$

2. Es sei $\pi(x)$ die Anzahl der natürlichen Primzahlen $\leq x$, $T_i(n)$ die Anzahl der möglichen Darstellungen einer natürlichen Zahl n als Produkt von i natürlichen Teilern ≥ 2 (wobei Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Faktoren unterscheiden, als verschieden gelten). Dann ist $\sum_{n=2}^{[x]} \pi(\sqrt[n]{x})/n = \sum_{n=2}^{\infty} (1 - T_2(n)/2 + T_3(n)/3 - \dots)$.

Es sei auf folgende Druckfehler hingewiesen: S. 6, Z. 6 v. o. muß es heißen $x \geq 1$ statt $x \leq 1$, S. 8, Z. 8 v. o. $1/2 T_2(y) \ln y$ statt $1/2 T_2(y)$, dieselbe S., Z. 11 v. u. $(\psi(y) - \psi(y-1))$ statt $(\psi(y) - \psi(y-1))$. Holzer (Wien).

Speiser, Andreas: Die Funktionalgleichung der Dirichletschen L -Funktionen. Mh. Math. Phys. 48, 240—244 (1939).

Gegeben sei eine abelsche Gruppe \mathfrak{G} der endlichen Ordnung g mit den Elementen A, B, C, \dots und der Basis A_1, \dots, A_h . A_ν habe die Ordnung g_ν . Den durch $\chi(A_\nu) = e^{\frac{2\pi i}{g_\nu} a_\nu}$ definierten Charakter von \mathfrak{G} bezeichnen wir mit χ_A , wo $A = \prod A_\nu^{a_\nu}$. Die Matrix $X = (\chi_A(B))$ (A Zeilen-, B Spaltenindex) ist dann symmetrisch, und man rechnet leicht nach, daß die Matrix $g^{-1} X$ die Ordnung 4 hat. (Für zyklische Gruppen vgl. I. Schur, Gött. Nachr. 1921, 147.) q sei eine natürliche Zahl; k und l mögen beide alle zu q primen Reste mod. q in einer Anordnung $1, a, a^{-1}, b, b^{-1} \dots$ durchlaufen, und es sei M die Matrix $\left(e^{\frac{2\pi i}{q} kl} \right)$, k Zeilen-, l Spaltenindex. Für die Gruppe \mathfrak{G} der Reste k mod. q bilden wir die Matrix X , wobei die Gruppenelemente k mod. q ebenfalls

in der eben genannten Anordnung zu nehmen sind. Es gilt dann auf Grund der Eigenschaft von $g^{-1}X$

$$XMX^{-1} = \begin{pmatrix} \tau(\chi_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \tau(\chi_a) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \tau(\chi_{a^{-1}}) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau(\chi_b) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \tau(\chi_{b^{-1}}) & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

mit $\tau(\chi_k) = \sum_{\nu=1}^q e^{\frac{2\pi i}{q}\nu} \chi_k(\nu)$; $k \bmod q$. Es sei $B(s, r) = \sum_{k=0}^{\infty} (r + qk)^{-s}$, $r = 1, 2, \dots, q-1$

und $b(s, r) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (r + qk)^{-s} = B(s, r) + (-1)^{-s} B(s, q-r)$. χ bedeute nur noch eigentliche Charaktere $\bmod q$ und $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} = \sum_{r \bmod q} \chi(r) B(s, r)$ die zugehörigen L -Funktionen. Die Riemannsche Schleifenintegration ergibt, daß $(1 - e^{(s-1)2\pi i}) \Gamma(s) L(s, \chi)$ gleich der dem Charakter χ entsprechenden Zeile der Spalte

$$(2\pi i)^s q^{-s} X \bar{M} \begin{pmatrix} b(1-s, 1) \\ b(1-s, a) \\ b(1-s, a^{-1}) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ist. Da an der Stelle χ der Spalte $X \begin{pmatrix} b(1-s, 1) \\ b(1-s, a) \\ b(1-s, a^{-1}) \\ \vdots \end{pmatrix}$ die Funktion $L(1-s, \chi)$

+ $(-1)^{s-1} \chi(-1) L(1-s, \chi)$ steht, die Matrix $X \bar{M} X^{-1}$ aber die zu konjugiert komplexen Charakteren gehörigen Zeilen vertauscht und mit Faktoren $\chi(-1) \tau(\chi)$ versieht, so ergibt sich die Funktionalgleichung für $L(s, \chi)$. *Deuring* (Jena).

Gruppentheorie.

Bernstein, B. A.: Groups and Abelian groups in terms of negative addition and negation. *Duke math. J.* 5, 871—874 (1939).

Gegeben ein System k von Elementen a, b, c, \dots und zwei Operationen: Δ und $'$. Werden die nachstehenden Postulate $P0 - P5$ (bzw. $P0 - P6$) erfüllt, dann ist das System $(k, \Delta, ')$ eine Gruppe (bzw. Abelsche Gruppe). — $P0$: k enthält mindestens zwei verschiedene Elemente; $P1$ und $P2$: Mit a und b liegen auch $a \Delta b$ bzw. a', b' in k ; $P3$: $(a \Delta b)' \Delta c = a \Delta (b \Delta c)'$; $P4$: $(a \Delta b) \Delta a = b$; $P5$: $(a \Delta b)' = b' \Delta a'$; $P6$: $a \Delta b' = b \Delta a$. — Aus $P1 - P5$ folgt nämlich 1. die Existenz einer Verknüpfung $+$, gegeben durch $a + b = (a \Delta b)'$, mit $(a + b) + c = a + (b + c)$; 2. die Existenz eines Nullelementes z für die Verknüpfung durch $+$, nämlich $z = a \Delta a'$ und 3. die Möglichkeit der unbeschränkten und eindeutigen vorderen und hinteren Subtraktion: $a' + a = a + a' = z$. Aus $P6$ folgt: $a + b = b + a$. Die Postulate $P1 - P6$ erweisen sich als untereinander unabhängig. *Grunwald* (Göttingen).

Lorenzen, P.: Ein vereinfachtes Axiomensystem für Gruppen. *J. reine angew. Math.* 182, 50 (1940).

Die Relation R der Mengenelemente, die eine Gruppe bilden sollen, kann entweder eine Multiplikation oder eine Division definieren. Werden die Axiome für eine Deutung, z. B. für die Multiplikation, hingeschrieben, so erhält man daraus durch Umdeuten ein Axiomensystem für die Division, das sich als gleichberechtigt erweist.

E. Schulenberg (Berlin).

Eaton, J. E., and Oystein Ore: Remarks on multigroups. Amer. J. Math. **62**, 67—71 (1940).

Ergänzungen zur Arbeit von Dresher und Ore, dies. Zbl. **19**, 107. Die Theorie der Multigruppen unterscheidet sich wesentlich von der Theorie der gewöhnlichen Gruppen dadurch, daß der Durchschnitt zweier Untermultigruppen leer sein kann. Da aber in gewissen Sätzen über spezielle Untermultigruppen dieser Fall ausgeschlossen werden muß, geben Verf. einige wichtige Klassen von Untermultigruppen an, in denen dies nicht eintreten kann, und leiten für sie weitere Sätze ab.

Ulm (Münster i. W.).

Manning, W. A.: On transitive groups that contain certain transitive subgroups. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 783—791 (1939).

Verf. erhält eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine transitive Permutationsgruppe imprimitiv ist. Daraus folgt ein Satz von Wielandt (dies. Zbl. **12**, 343) über die Imprimitivität der einfach transitiven Permutationsgruppen. Eine Methode für die Konstruktion aller Matrizen wird gegeben, die mit einer transitiven Permutationsgruppe elementweise vertauschbar sind.

Shoda.

Sagastume Berra, A. E.: Über eine gewisse Gruppenklasse. Contrib. estud. ci. fis. mat. **1**, 417—423 (1938) [Spanisch].

Es werden die durch die zwischen den Erzeugenden A und B bestehenden definierenden Relationen $A^{2k} = E$, $B^2 = A^k$, $BA = A^{-1}B$ gekennzeichneten Gruppen betrachtet und ihre Untergruppen, Normalteiler, Kommutatorgruppen und irreduziblen Darstellungen angegeben.

G. Hajós (Budapest).

Sagastume Berra, A. E.: Die Algebren der Gruppen H_h . Contrib. estud. ci. fis. mat. **1**, 425—434 (1938) [Spanisch].

Sei H_h das direkte Produkt der Permutationsgruppe von $h = 2k$ Elementen e_1, \dots, e_h mit der Gruppe (e_1, e_{h+1}) , wobei $e_{h+1}^2 = e_{k+1}^2 = e_{k+1}$ und $e_{\mu+1} \cdot e_{h+1} = e_{h+\mu+1}$ für $\mu = 0, \dots, h-1$ ist (s. dies. Zbl. **19**, 156). Die zu H_h gehörige rationale Algebra wird nach den Methoden des Ref. untersucht (Die Algebren der Diedergruppen. Zürich: Inaug.-Diss. 1928). Die vier Darstellungen ersten Grades liefern Algebren, die zum Körper R der rationalen Zahlen oder zu $R(i)$ isomorph sind, die Darstellung zweiten Grades liefert eine vollständige Matrixalgebra über dem Körper der h -ten primitiven Einheitswurzel.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Sagastume Berra, A. E.: Über die einer endlichen Gruppe assoziierten Gruppen. Contrib. estud. ci. fis. mat. **1**, 445—449 (1938) [Spanisch].

Anschließend an eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **19**, 156) wird die endliche Gruppe G in ihrer regulären Darstellung als Untergruppe der Permutationsgruppe S gegeben; einem G -Element entspricht in S die Permutation $\xi \rightarrow \xi\gamma$ (γ fest). Als zu G assoziierte Gruppen werden folgende bezeichnet: der Normalisator H von G in S , die Gesamtheit N der mit jedem G -Elemente vertauschbaren S -Elemente, $K = G \cdot N$, das Zentrum Z , ferner die Automorphismengruppe und die Gruppe der inneren Automorphismen von G . Es wird bewiesen, daß die Elemente von H den Permutationen $\xi \rightarrow \varepsilon \xi^A$ (ξ^A durch einen Automorphismus A zu ξ zugeordnetes G -Element), die Elemente von N den Permutationen $\xi \rightarrow \varepsilon \xi$, die Elemente von K der Permutationen $\xi \rightarrow \varepsilon \xi\gamma$ entsprechen. G und N sind wechselseitig einander zugeordnet. Die Relationen $K = G$, $K = N$, $G = Z$, $N = Z$ sind gleichwertig, woraus folgt, daß unter den in der erwähnten Arbeit angegebenen denkbaren 16 Gruppentypen nur 6 Typen tatsächlich vorhanden sind. Die zyklische Gruppe zweiter Ordnung, die anderen abelschen und die vollständigen Gruppen ergeben je einen dieser Typen; alle anderen Gruppen gehören zu den übrigbleibenden drei Typen.

G. Hajós (Budapest).

Tehounikhin, S. A.: Einige Sätze über einfache Gruppen. Rec. math. Moscou, N. s. **5**, 537—542 (1939).

Beweise und Verschärfungen von Sätzen des Verf. aus früheren Arbeiten. Vgl. dies. Zbl. **12**, 342, **343** u. **19**, 251.

Ulm (Münster i. W.).

Turkin, W. K., et P. E. Dubuque: Sur la structure des groupes simples. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 329—340 u. franz. Zusammenfassung 341—342 (1939) [Russisch].

Beweis des in dies. Zbl. 20, 208 angegebenen Satzes (s. auch dies. Zbl. 19, 397 u. 21, 107). Sei ferner \mathfrak{P} eine Abelsche Untergruppe der Ordnung 2^α der Gruppe \mathfrak{G} der Ordnung $2^\beta \cdot n$, n ungerade. A aus \mathfrak{P} sei von der Ordnung 2^k , und es sei jedes mit einer Potenz von A konjugierte Element aus \mathfrak{P} wiederum eine Potenz von A . Wenn A^{2^k-2} nicht mit seinem Inversen konjugiert ist, und wenn die Ordnung des Normalisators von A^{2^k-1} nicht durch $2^{k+\alpha}$ teilbar ist, dann besitzt \mathfrak{G} einen Normalteiler, dessen Ordnung durch n teilbar ist.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Suetuna, Zyoiti: Über die Zerlegung der Gruppencharaktere. Jap. J. Math. 16, 63—69 (1939).

Die Frage nach allen irreduziblen Charakteren einer Gruppe \mathfrak{G} , die in einem Normalteiler \mathfrak{G}' einen gegebenen irreduziblen Charakter ψ von \mathfrak{G}' enthalten, wird unter der Voraussetzung, daß die Faktorgruppe eine lineare Gruppe modulo der Primzahl p ist, vollständig beantwortet. Über den Fall, daß die Anzahl n der zu ψ unter \mathfrak{G} konjugierten Charaktere von \mathfrak{G}' durch p teilbar ist, s. die Arbeit: Abhängigkeit der L -Funktionen in gewissen algebraischen Zahlkörpern (dies. Zbl. 16, 153). Hier wird der Fall $p \nmid n$ behandelt und ferner die Aufspaltung der gefundenen irreduziblen Charaktere in der Zwischengruppe vom Index p in \mathfrak{G} ausgeführt. *Zassenhaus* (Hamburg).

Stýpanoff, P.: Sur les congruences de systèmes d'éléments d'un groupe. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 99—102 (1939).

Zwei Systeme \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 von Gruppenelementen der Gruppe \mathfrak{G} heißen kongruent nach einer Untergruppe \mathfrak{H} , falls $S_1 = HS_2$ für jedes $S_1 \in \mathfrak{S}_1$ und ein gewisses $H \in \mathfrak{H}$ gilt und umgekehrt. Die Beziehung ist reflexiv, symmetrisch und transitiv und erfüllt die Eigenschaften von Zahlkongruenzen, wobei man, wenn nötig, \mathfrak{H} als Normalteiler voraussetzen muß. Dann läßt sich die Existenzbedingung eines Normalteilers von \mathfrak{G} durch Kongruenzen schreiben, in denen \mathfrak{S}_1 , \mathfrak{S}_2 und ein invarianter Komplex \mathfrak{A} von \mathfrak{G} auftreten.

E. Schulenberg (Berlin).

Baer, Reinhold: Duality and commutativity of groups. Duke math. J. 5, 824—838 (1939).

In Verallgemeinerung einer früheren Begriffsbildung (dies. Zbl. 16, 14) werden zwei Gruppen G und H dual zueinander genannt, wenn die Untergruppen S, T, \dots von G auf die Untergruppen $S^{(d)}, T^{(d)}, \dots$ von H durch eine eindeutige Zuordnung d derart bezogen werden, daß $S \leq T$ dann und nur dann, wenn $T^{(d)} \leq S^{(d)}$. G wird dabei auf die Einheit von H und H auf die Einheit von G abgebildet. Falls das Produkt zweier Dualismen existiert, so wird eine Untergruppe einer Untergruppe einer Untergruppe der entsprechenden Untergruppe zugeordnet und diese Zuordnung ein Untergruppenisomorphismus genannt. 1. Falls die Abelsche Gruppe G keine Elemente unendlicher Ordnung enthält und es für jedes p nur endlich viele Elemente der Ordnung p gibt, so gibt es eine Gruppe, die zu G dual ist. 2. Sind die Abelschen Gruppen G und H je zu sich selbst dual und gibt es zwischen G und H einen Untergruppenisomorphismus, so gibt es einen Dualismus zwischen G und H . Daraus folgt, daß es zu einer Abelschen Gruppe nur dann eine duale gibt, wenn sie zu sich selbst dual ist. 3. Eine endliche p -Gruppe G ist nur dann Abelsch, wenn es zu ihr eine duale Gruppe gibt und die nicht Abelschen Faktorgruppen S/T von Untergruppen S von G nicht untergruppenisomorph mit Abelschen Gruppen sind. Zum Schluß werden die Dualismen zweier Gruppen in einer umfassenden Gruppe dargestellt. *J. J. Burckhardt* (Zürich).

Tschernikow, S.: Über unendliche spezielle Gruppen. Rec. math. Moscou, N. s. 6, 199—212 u. deutsch. Zusammenfassung 213—214 (1939) [Russisch].

\mathfrak{G} heißt spezielle Gruppe, wenn jede abnehmende Kette ihrer Untergruppen endlich und jede ihrer eigentlichen Untergruppen von ihrem Normalisator in \mathfrak{G} verschieden ist. — Eine Gruppe \mathfrak{G} heißt lokal endlich, wenn jede endliche Untermenge ihrer Elemente eine endliche Untergruppe erzeugt. — Einige Ergebnisse der Arbeit

lauten: Jede spezielle Gruppe ist ein direktes Produkt einer endlichen Anzahl von speziellen p -Gruppen, die zu verschiedenen Primzahlen p gehören; und umgekehrt! — Jede spezielle Gruppe besitzt ein Zentrum, das von der Einheit verschieden ist. — Jede Untergruppe einer speziellen Gruppe ist speziell. — Jede spezielle Gruppe ist lokal endlich. — Wenn eine unendliche p -Gruppe lokal endlich ist und alle ihre eigentlichen Untergruppen endlich sind, so ist sie eine primäre Abelsche Gruppe vom Typus p^∞ . — Wegen weiterer Festsetzungen und Ergebnisse muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Grunwald (Göttingen).

Kurosch, Alexander: Einige Bemerkungen zur Theorie der unendlichen Gruppen.

Rec. math. Moscou, N. s. 5, 347—353 u. dtsh. Zusammenfassung 353—354 (1939) [Russisch].

Verf. zeigt: I. Bekanntlich hat jede endliche p -Gruppe, d. h. eine Gruppe, in der jedes Element als Ordnung eine Potenz der gleichen Primzahl p hat, ein nichttriviales Zentrum. Es wird ein Beispiel einer unendlichen p -Gruppe ohne Zentrum, d. h. deren Zentrum gleich der Identität ist, angegeben. II. Während jede abzählbare primäre abelsche Gruppe ohne Elemente von unendlichem Höhenexponenten — die Identität nicht mitgerechnet — in eine direkte Summe von Zyklen des Typus (p^n) , $n = 1, 2, 3, \dots$, zerlegbar ist, gilt ein entsprechender Satz bei überabzählbaren Gruppen nicht, wie Prüfer [Math. Z. 17, 35 (1923)] und später Ref. (dies. Zbl. 6, 150) durch ein Beispiel einer solchen Gruppe der Mächtigkeit \aleph_1 belegt haben. Verf. gibt ein neues recht einfaches Beispiel für eine Gruppe der Mächtigkeit \aleph_1 an, für welche eine derartige Zerlegung nicht existiert. III. zeigt Verf., daß die Menge der nichtisomorphen Gruppen der Mächtigkeit \aleph_α die Mächtigkeit 2^{\aleph_α} hat für beliebige Mächtigkeit \aleph_α . (Ref. nach deutscher Zusammenfassung.)

Ulm (Münster i. W.)

Barrett, W.: Sur la structure des groupes semi-simples réels. Bull. sci. École polytechn. Timisoara 9, 22—90 (1939).

Eine reelle halbeinfache Infinitesimalgruppe G ergibt nach Übergang zum komplexen Koeffizientenbereich eine komplexe halbeinfache Infinitesimalgruppe \mathfrak{G} . Ist G einfach, so ist \mathfrak{G} entweder direkte Summe von zwei zu G isomorphen einfachen Gruppen oder wieder einfach. Jedenfalls definiert der Übergang zum konjugiert Komplexen in \mathfrak{G} eine Involution, und wenn diese Involution in \mathfrak{G} bekannt ist, so ist dadurch G bestimmt. Ist nun g_0 eine maximale abelsche Untergruppe von G und \mathfrak{g}_0 die entsprechende Untergruppe von \mathfrak{G} , so definiert die Involution in \mathfrak{G} auch eine Involution in \mathfrak{g}_0 , die das System der „Wurzelvektoren“ invariant läßt. Durch diese Involution ist aber G bereits bestimmt. Die Bestimmung aller reellen halbeinfachen Infinitesimalgruppen kommt somit auf die Bestimmung aller Involutionen im Vektorraum \mathfrak{g}_0 hinaus, die noch gewisse Nebenbedingungen zu erfüllen haben. Diese Bestimmung wird nun für alle möglichen einfachen Infinitesimalgruppen durchgeführt. Mit einer ähnlichen rein algebraischen Methode werden auch alle reellen reell-irreduziblen Darstellungen der reellen einfachen und halbeinfachen Gruppen aufgestellt.

van der Waerden (Leipzig).

Kowalewski, Gerhard: Zur Cesàro-Pickschen Geometrie. J. reine angew. Math. 181, 218—241 (1940).

Verf. stellt für alle elementtransitiven Gruppen r -ter O. der Ebene die Stammtransformationen $X_I f$, $X_{II} f$ auf, wobei nach seiner Terminologie $X_I f$ die aktive, $X_{II} f$ die passive Transformation bedeutet. Aus beiden läßt sich die ganze Gruppe erklammern, so daß also sämtliche linear unabhängigen infinitesimalen Transformationen repräsentiert werden durch die Reihe

$$(1) \quad X_I f, X_{II} f, (X_I X_{II}), (X_I (X_I X_{II})), \dots$$

Die Stammtransformationen gewinnt Verf. aus der infinitesimalen Identitätsformel der Cesàro-Pickschen Geometrie, welche die Änderungen der Relativkoordinaten u, v eines Punktes x^*, y^* beim Übergang vom Bezugselement $E(x, y, y', \dots, y^{(r-2)})$ zu

einem unendlich benachbarten bestimmt. Verf. gibt ein einfaches Verfahren an, wie man diese Formel in die Gestalt

$$(2) \quad df/d\sigma = W_I f + I W_{II} f$$

bringen kann, wobei I und $d\sigma$ die Differentialinvariante und das Bogenelement der Gruppe bedeuten; I und $d\sigma$ hängen von den Argumenten $x, y, y', \dots, y^{(r-1)}$ ab, $W_I f, W_{II} f$ bezeichnen infinitesimale Transformationen in u, v . $X_I f, X_{II} f$ sind die in x, y geschriebenen $W_I f, W_{II} f$. — Verf. gelangt so zu einer Tabelle aller ebenen elementtransitiven Gruppen, in welcher jede Gruppe lediglich durch ihre beiden Stammtransformationen $X_I f, X_{II} f$ repräsentiert wird. Diejenigen Gruppen, bei welchen die aktive Transformation noch nicht die Form p besitzt, bringt Verf. durch einfache Variablenänderung auf die Form $p, X_{II} f$. Es wird dadurch möglich, die Tabelle der elementtransitiven Gruppen unter der Voraussetzung $X_I f = p$ auf die Angabe der passiven Transformation zu beschränken. Diese sieht dann stets so aus:

$$(3) \quad X_{II} f = W f = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) W_i f, \quad W_i f = \xi_i(y) p + \eta_i(y) q \quad (i = 1, \dots, n),$$

wobei die „Bausteine“ $W_i f$ sowohl wie die $\varphi_i(x)$ linear unabhängig sind. — Es lassen sich nun zwei Klassen von Gruppen unterscheiden, je nachdem p von den $W_i f$ linear unabhängig ist oder nicht. Zu der ersten Klasse gehört u. a. die projektive G_8 . Bei dieser ist überdies die Zahl n der Bausteine am größten, nämlich gleich 7, während bei allen übrigen elementtransitiven Gruppen der Ebene n höchstens gleich 4 wird.

Neumer (Worms).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Maccaferri, Eugenio: Sulla struttura degli insiemi di punti. *Esercit. Mat.* 12, 19—26 (1940).

Die Arbeit führt in übersichtlicher Weise in die wichtigsten Begriffsbildungen der Lehre von den Punktmengen ein; die Sätze, die sich um das Theorem von Cantor-Bendixson gruppieren, werden bewiesen. J. J. Burckhardt (Zürich).

Javez, M.: Classification de E. Borel-W. H. Young des éléments d'un espace semiordonné. *Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff*, IV. s. 15, Nr 2, 35—41 u. franz. Zusammenfassung 40—41 (1938) [Ukrainisch].

Jede Mengenkategorie kann offenbar teilweise geordnet werden, indem man \leq statt des Inklusionszeichens \subset setzt. Bei passender Axiomatisierung der teilweisen Ordnung kann man eine Klassifikation der Elemente einer teilweise geordneten Menge angeben, die der Borelschen Klassifikation von Mengen entspricht. Verf. entwickelt eine auf diesem Gedanken beruhende verallgemeinerte Theorie der Borelschen Klassen und gibt insbesondere einen verallgemeinerten Separationssatz. Bedřich Pospíšil (Brünn).

Raikov, D.: On the addition of point-sets in the sense of Schnirelmann. *Rec. math. Moscou*, N. s. 5, 425—438 u. engl. Zusammenfassung 439—440 (1939) [Russisch].

Man hat in den letzten Jahren vielfach die additiven Eigenschaften der Dichten von wachsenden Folgen natürlicher Zahlen untersucht (vgl. den zusammenfassenden Bericht von Rohrbach, dies. Zbl. 20, 3). Schnirelmann (dies. Zbl. 21, 207) hat gezeigt, wie man diese Begriffsbildungen auf die Addition von Mengen nichtnegativer Zahlen übertragen kann. In dieser Richtung beweist Verf. folgende Sätze: Sind A, B zwei Mengen nichtnegativer Zahlen mit $0 \in A, B$, so werde die Menge aller Zahlen $a + b$ ($a \in A, b \in B$) mit $A + B$ bezeichnet; $m(A)$ bedeute das innere Lebesguesche Maß von A ; für $y > 0$ sei $\pi(A, y) = \inf_{0 < x < y} x^{-1} m(A \cdot (0, x))$. — I. Dann ist (vgl. auch Schnirelmann, l. c.)

$$1) \quad \pi(A + B, y) \geq \min(\pi(A, y) + \pi(B, y), 1).$$

II. Ist 0 ein Häufungspunkt von B , so gibt es offenbar eine im Intervall $(0, \infty)$ dichte Menge B_∞ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\xi \in B_\infty$ gibt es k Zahlen $b_i \in B$ mit $\xi = b_1 + \dots + b_k$; das kleinste solche k heiße $g(\xi)$; weiter sei $h(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\inf_{\eta \in B_\infty} \left| \eta - \xi \right| < \varepsilon \right) g(\eta)$,

$$H(y) = \sup_{0 < x < y} \frac{1}{x} \int_0^x h(\xi) d\xi. \text{ Ist } H(y) < \infty, \text{ so ist } h(\xi) \text{ beschränkt für } 0 \leq \xi \leq y,$$

und es gilt folgendes Analogon eines Satzes von Erdős (dies. Zbl. 13, 150) und Landau (dies. Zbl. 16, 202): Ist $\pi(A, y) = \alpha$ und $H(y) \leq \lambda$ (dies gilt insbesondere, wenn sich jedes $x \geq 0$ als Summe von höchstens λ Zahlen aus B darstellen läßt), so ist

$$(2) \quad \pi(A + B, y) \geq \alpha + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2\lambda}.$$

III. Reduziert man alle Zahlen in $A, B, A + B$ modulo Eins und ersetzt $\pi(A, y), H(y)$ durch $m(A), \int_0^1 h(\xi) d\xi$, so gilt (bei geringfügigen und selbstverständlichen Modifikationen der Voraussetzungen) wieder (1), (2), nur fällt der Faktor $\frac{1}{2}$ in (2) weg. *Jarník.*

Hellmich, Kurt: Funktionen, deren Werte Mengen sind. Mh. Math. Phys. 49, 73—104 (1940) u. Innsbruck: Diss. 1939.

Si consideri un insieme E ed una funzione che, ad ogni punto a di E , faccia corrispondere un insieme $F(a)$ di un certo spazio R . Il lavoro generalizza a simili funzioni alcuni concetti e teoremi noti della teoria delle funzioni di variabile reale. Una tale funzione è detta superiormente continua [inferiormente continua] rispetto ad a , se, per ogni successione $\{a_n\}$ di punti tendenti ad a in E , è: $\lim_n \overline{F(a_n)} \subseteq F(a)$ [$\lim_n F(a_n) \supseteq F(a)$]; è detta continua, se è $\lim_n F(a_n) = \overline{\lim_n F(a_n)} = F(a)$. Se $A \subset B$ sono due insiemi chiusi (e non vuoti) di R , ϱ un qual. numero reale > 0 , si definiscono l'intorno aperto di raggio ϱ dell'insieme A in B , $U(A, \varrho) = \hat{x} \{x\overline{A} < \varrho, x \in B\}$ e l'intorno chiuso $\overline{U}(A, \varrho) = \hat{x} \{x\overline{A} \leq \varrho, x \in B\}$. La funzione $\overline{U}(A, \varrho)$ è, in ogni caso, superiormente continua rispetto a ϱ . Ipotesi fondamentale relativa ad R è che, per ogni A in R , la funzione $\overline{U}(A, \varrho)$ sia continua ($B \equiv R$). La prima parte del lavoro è dedicata alla costruzione di funzioni $F(x)$ continue sull'intervallo 01 dell'asse reale, in vari casi particolari. In ogni caso vengono prefissati gli insiemi $A = F(0)$, $B = F(1)$, supposti chiusi (e non vuoti) e tali che $A \subset B$. Le $F(x)$ ottenute sono monotone crescenti, cioè, per ogni coppia di valori x_1, x_2 di x tali che $x_1 < x_2$, risulta $F(x_1) \subset F(x_2)$. La seconda e la terza parte del lavoro contengono numerose proposizioni relative alla possibilità di rappresentare funzioni $F(a)$ semicontinue come limiti di successioni di funzioni continue, altre atte a chiarire la natura profonda delle funzioni, in rapporto soprattutto alla connessione ed alla compattezza degli insiemi-valori che esse assumono.

Tullio Viola (Roma).

Denjoy, A.: Topological and metrical points of view in the theory of sets and functions of real variables. Duke math. J. 5, 806—813 (1939).

Es wird eine Eigenschaft (einer Funktion, die als Punkt des n -dimensionalen euklidischen Raumes dargestellt ist) topologisch genannt, falls bei einer topologischen Abbildung des Raumes diese Eigenschaft invariant bleibt. Eine Eigenschaft ist metrisch p -ter Ordnung im Falle des Bestehens der Invarianz bei einer topologischen Abbildung des Raumes, die mit der inversen Abbildung stetige Ableitungen p -ter Ordnung besitzt. Verf. weist auf die wichtige Rolle hin, die diese Eigenschaften in den Untersuchungen der Theorie der reellen Funktionen spielen, und zwar stehen die topologischen Eigenschaften mit den Dichtigkeitseigenschaften im engen Zusammenhang; die Arbeiten von Cantor und Baire beziehen sich auf diese Richtung. Dem entgegen sind die auf Meßbarkeit bezüglichen Untersuchungen (von Lebesgue und anderen) von metrischem Charakter.

L. Egged (Budapest).

Tolstoff, G.: La méthode de M. Perron pour l'intégrale de M. Denjoy. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 470—472 (1939).

In Math. Z. 34; dies. Zbl. 2, 386 betrachtete der Ref. zu einer in $[a, b]$ definierten Funktion $f(x)$ gehörende, stetige Majoranten $\{\psi(x)\}$, für deren jede: $\alpha)$ $\psi(a) = 0$ ist, $\beta)$ eine Überdeckung von $[a, b]$ durch abzählbar viele perfekte Mengen (E_j) und eine (evtl. leere) abzählbare Menge M existiert, derartig, daß auf jedem E_j die in bezug auf dieses E_j genommenen, unteren Derivierten von $\psi(x) \neq -\infty$ und $\geq f(x)$ sind. Diese Majoranten (und zugehörige Minoranten) führen zu einer „Perron“-Integration, gleichwertig mit der allgemeinen Denjoyschen Integration. Tolstoff betrachtet es als ein Übel, daß die in obiger Definition auftretenden perfekten Mengen paarweise mehr als abzählbar viele Punkte gemeinsam haben können, und wünscht somit nur Überdeckungen von $[a, b]$ zuzulassen, bei welchen je zwei der perfekten Mengen höchstens abzählbar viele Punkte gemeinsam haben. [Ref. bemerkt dazu, daß sich mittels transfiniter Induktion aus einem Baireschen Satze (vgl. S. Saks, Théorie de l'intégrale; dies. Zbl. 7, 105) unmittelbar ableiten läßt, daß jede oben definierte Majorante eine solche auch im Sinne der angedeuteten Abänderung ist (die Umkehrung ist evident).] Außerdem kündigt der Autor den Beweis eines Satzes an, nach dem der allgemeine Denjoysche Integralbegriff äquivalent ist mit einem „Perron“-Integral, welches man erhält, wenn oben unter $\beta)$ nicht die untere Derivierte von $\psi(x)$, sondern ihre Ableitung in bezug auf E_j benutzt wird (die Ableitung soll auf E_j überall existieren und die Ungleichungen erfüllen in allen Punkten von E_j , eine höchstens abzählbare Menge ausgenommen) und daneben M leer ist (und eine analoge Abänderung in der Definition der Minorante vorgenommen wird).

J. Ridder (Groningen).

Tolstoff, G.: Sur l'intégrale de Perron. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 647—659 (1939).

This note contains in its first part a proof of the following theorem, already demonstrated (in another manner) by Marcinkiewicz (see Saks, Theory of the integral, Warszawa 1937, p. 253; this Zbl. 17, 300): A measurable function, which has on $[a, b]$ at least one major function and one minor function in the sense of Perron, is necessarily P -integrable on $[a, b]$. The P -integral was extended by Burkill (this Zbl. 2, 386) to an „approximately continuous“ P -integral, and the Rev. has shown (this Zbl. 9, 57) that every function integrable in the sense of Burkill also has an „approximately continuous“ general Denjoy-integral (an integral obtained from the general Denjoy-integral in a similar manner as the approximately continuous P -integral from the P -integral). The second part of this note gives an example which shows that the class of the approximately continuous general D -integrals is wider than that of the approximately continuous P -integrals in the sense of Burkill.

J. Ridder (Groningen).

Tolstoff, G.: Sur quelques propriétés des fonctions approximativement continues. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 637—645 (1939).

Le résultat principal est le théorème suivant [dont l'auteur dérive encore quelques conséquences, e. a. une généralisation d'un théorème de Khintchine, Fundam. Math. 9, 243 (1927)]: Si $f(x)$ est approximativement continue sur $[a, b]$ et y possède une dérivée approximative $\varphi(x)$ (finie ou infinie) en tous les points sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable, et si $\varphi(x) \geq 0$ „presque partout“ sur $[a, b]$, alors on a: 1. $f(x)$ est continue et non-décroissante, 2. $\varphi(x)$ est la dérivée ordinaire de $f(x)$ en tous les points où $\varphi(x)$ existe. En outre l'auteur considère un problème de Lusin: $f(x)$ étant une fonction mesurable sur $[a, b]$, existe-t-il toujours une fonction continue $F(x)$ qui possède une dérivée en tous les points d'un ensemble de deuxième catégorie et de mesure $b - a$ telle que $F'(x) = f(x)$ presque partout? La réponse est négative et elle reste telle si l'on remplace la continuité par la continuité approximative et la dérivée par la dérivée approximative. Cf. Tolstoff, Rec. math. Moscou, N. s. 4; ce Zbl. 21, 16.

J. Ridder (Groningen).

Tambs Lyche, R.: Une expression simple pour une fonction continue sans dérivée. Norske Vid. Selsk., Forh. **12**, 45—48 (1939).

Bedeutet $g(x)$ den Abstand von x zur nächstliegenden ganzen Zahl, so ist die Funktion $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$,

$$f_n(x) = g(x) + \frac{1}{2}g(2x) + \frac{1}{2^2}g(2^2x) + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}g(2^{n-1}x),$$

eine stetige, nirgends differenzierbare Funktion. Man kann ihre Eigenschaften sofort ablesen, wenn man sie auf eine andere Form bringt. Zerlegt man jede Zahl x zwischen 0 und 1 in der Form $x = 2^{-\alpha_1} + 2^{-\alpha_2} + \dots$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$, so gilt nämlich im besagten Intervall

$$f(x) = \alpha_1 \cdot 2^{-\alpha_1} + (\alpha_2 - 2) \cdot 2^{-\alpha_2} + \dots (\alpha_i - 2i + 2) \cdot 2^{-\alpha_i} + \dots$$

Eine Zeichnung der Funktion ist beigelegt.

Harald Geppert (Berlin).

Cooper, R.: Transformations of enumerable sets which are dense in an interval. Quart. J. Math., Oxford Ser. **10**, 247—251 (1939).

Verf. schließt sich an die Untersuchungen von Sierpiński (vgl. dies. Zbl. **13**, 152) an und zeigt die Gültigkeit des folgenden Satzes: Seien E und F zwei im Intervalle $(0, 1)$ dichte, abzählbare Mengen. Bei gegebenem ε (< 1) und N (ganze Zahl) gibt es eine konvexe und wachsende Funktion $f(x)$ mit N Ableitungen in $0 \leq x \leq 1$, die eine Abbildung von E auf F definiert und für deren erste Ableitung die Ungleichung $1 - \varepsilon < f'(x) < 1 + \varepsilon$, für deren ν -te Ableitung ($\nu = 2, 3, \dots, N$) $|f^{(\nu)}(x)| < \varepsilon$ besteht. Dieses Resultat kann auf das Intervall $(-\infty, \infty)$ ausgedehnt werden. Für verschiedene Intervalle zeigen sich gewisse Abweichungen.

L. Egged (Budapest).

Price, G. Baley: A class of monotone functions. Amer. J. Math. **61**, 941—946 (1939).

Considérons une fonction $u(x, y)$ monotone sur toute droite qui coupe un domaine plan, convexe et fermé C (f. linéairement monotone). L'ensemble des discontinuités d'une telle fonction est formé: 1° par un ensemble dénombrable de segments de droites ayant leurs extrémités sur la frontière de C et ne se coupant pas deux à deux à l'intérieur de C , 2° par un ensemble dénombrable de discontinuités sur la frontière de C . Soit d un segment de discontinuités. Toutes les limites radiales de u , aux points du segment ouvert d et d'un même côté de d , ont la même valeur u_m et toutes les limites radiales de l'autre côté de d ont la même valeur u_M ($\neq u_m$). Sur le segment ouvert d la fonction est comprise entre u_m, u_M . Par tout point de continuité (intérieur) de u on peut faire passer une droite qui ne coupe aucun segment de discontinuités et sur laquelle la fonction est constante (à l'intérieur de C). Les points de discontinuités de la frontière sont: 1° ou bien les extrémités des segments de discontinuités, 2° ou bien des intersections de deux droites sur lesquelles, à l'intérieur de C , la fonction u est constante avec des valeurs différentes. Les discontinuités périphériques sont ainsi d'une nature différente de celle des discontinuités intérieures et une fonction linéairement monotone ne peut être prolongée, en général, au delà de la frontière de C . Les résultats s'étendent facilement aux fonctions linéairement monotones de plusieurs variables. T. Popoviciu (Cernăuți).

Jeffery, R. L.: Functions of bounded variation and non-absolutely convergent integrals in two or more dimensions. Duke math. J. **5**, 753—774 (1939).

Definitions: 1. A function $F(x, y)$ is in class V_2 on the interval $R[0, 0; a, b]$ if there exists a single valued function $f(x, y)$ on R and a sequence of summable functions $s_n(x, y)$ tending to f on R and for which

$$F(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^y \int_0^x s_n dx dy.$$

2. A function $F(x, y)$, in class V_2 on R , is in class V_1 on a measurable set $E \subset R$, if for every measurable set $e \subset E$ the limit of $\int_e s_n dx dy$ exists, and $\int_e s_n dx dy$ is bounded

in n and e . 3. $F(x, y)$, in class V_2 on R , is in class V_1 at a point (x, y) of a closed set $E \subset R$, if for every sufficiently small interval ω containing (x, y) in its interior or on its boundary $F(x, y)$ is in class V_1 on ωE . 4. A function $F(x, y)$, in class V_2 on R , is absolutely additive at a point (x, y) of the closed set $E \subset R$, if for every sufficiently small interval ω containing (x, y) in its interior or on its boundary: $\alpha) F(e) = \lim_{\epsilon} \int_{\omega} s_n dx dy$

exists for every measurable set $e \subseteq \omega E$, $\beta) F(e)$ is completely additive over ωE , $\gamma) F(\sum u_i) = \sum F(u_i)$, where u_i are the intervals and parts of intervals on ω of a set $\mathfrak{C}(R, E)$ of non-overlapping rectangles which, in explicitly defined manner, covers CE , the complement of E with respect to R , and where $F(\sum u_i) = \lim_{\sum u_i} \int s_n dx dy$.

$\delta) \sum w_i$ converges, when w_i is the least upper bound of $|F(\omega)|$ for all intervals ω on u_i . Theorem: If $F(x, y)$ is in class V_2 on R and is such that if E is any closed set on R then the points of E at which $F(x, y)$ is not of class V_1 and absolutely additive are non-dense on E , then $F'(x, y)$ (defined with regular families of intervals) exists almost everywhere on R and is equal to $f(x, y)$. If two continuous functions $F(x, y)$ and $\varphi(x, y)$ satisfy the hypotheses of this theorem with respect to the same function $f(x, y)$, then $F(x, y) = \varphi(x, y)$. Therefore it is possible to consider a continuous function $F(x, y)$ of this kind as an integral of $f(x, y)$. If the additive function of intervals $F(\omega)$ is continuous on R and if its strong derivative $F'_s(x, y)$ exists and is finite at each point of R , then $F(0, 0; x, y)$ is the integral of $F'_s(x, y)$ in the foregoing sense. The author also shows how to obtain a continuous additive function of intervals $F(\omega)$ defined on R by an at most denumerable set of operations on its derivative $F'(x, y)$ if this derivative exists and is finite at each point of R . Cf. R. L. Jeffery, Bull. Amer. Math. Soc. 44; this Zbl. 20, 11. J. Ridder (Groningen).

Analysis.

Allgemeines:

Ganapathy Iyer, V.: On certain functional equations. J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 312—315 (1939).

Untersuchungen über die Lösungen der Gleichung $P^2 + Q^2 = 1$ bzw. $P^n + Q^n = 1$ durch ganze Funktionen. Ulm (Münster i. W.).

Vesean, T.: Lösung einer Funktionalgleichung unter einer Zusatzbedingung. Bol. mat. 12, 260—262 (1939) [Spanisch].

Die Funktionalgleichung $f\left(\frac{1}{x_1 x_2}\right) = f\left(1 + \frac{x_2}{x_1}\right) + f\left(1 + \frac{x_1}{x_2}\right)$ läßt sich unter der Zusatzbedingung $x_1 + x_2 = 1$ auf die Gleichungen $f(y + z) = f(y) + f(z)$ oder $f(yz) = f(y) + f(z)$ mit den Lösungen $f(x) = cx$ und $f(x) = C \log x$ zurückführen. Harald Geppert (Berlin).

Popoff, Kyrille: Su una generalizzazione della nozione di derivata di una funzione di variabile reale o complessa. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 3, 162—170 (1939).

Übersicht über die vom Verf. in Mh. Math. Phys. 48; dies. Zbl. 21, 306 für den Fall von Funktionen einer reellen Veränderlichen ausführlich behandelten, verallgemeinerten Ableitungen. Außerdem Übertragung auf den Fall von Funktionen einer komplexen Veränderlichen. J. Ridder (Groningen).

Haviland, E. K.: Asymptotic probability distributions and harmonic curves. Amer. J. Math. 61, 947—954 (1939).

Soient $x = \xi_1(\vartheta_1)$, $y = \eta_1(\vartheta_1)$ et $x = \xi_2(\vartheta_2)$, $y = \eta_2(\vartheta_2)$ deux courbes planes fermées; les coordonnées d'un point sur l'une ou sur l'autre sont exprimées en fonction du paramètre ϑ_1 ou ϑ_2 . L'auteur considère la transformation $x = \xi_1(\vartheta_1) + \xi_2(\vartheta_2)$, $y = \eta_1(\vartheta_1) + \eta_2(\vartheta_2)$ et il étudie les points où le déterminant fonctionnel $\frac{D(x, y)}{D(\vartheta_1, \vartheta_2)}$ s'annule (voir E. R. van Kampen — A. Wintner, ce Zbl. 16, 18); une analyse détaillée de la transformation est donnée dans le cas où les deux courbes sont des ellipses. B. Hostinský (Brünn).

Hornstein, M.: Einige Bemerkungen über lineare Differenzgleichungen zweiter Ordnung und über Kettenbrüche. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 269—286 u. deutsch. Zusammenfassung 286—288 (1939) [Russisch].

Die Differenzengleichung $D_{\nu+2} + a_{\nu} D_{\nu+1} + b_{\nu} D_{\nu} = 0$ mit $a_{\nu} \rightarrow a$, $b_{\nu} \rightarrow b$ hat Grundsysteme $D_{\nu}^{(1)}$, $D_{\nu}^{(2)}$, für die $D_{\nu+1}^{(i)}: D_{\nu}^{(i)} \rightarrow \varrho_i$ gilt, wo ϱ_i die als verschieden angenommenen Wurzeln von $\varrho^2 + a\varrho + b = 0$ sind. Hier werden für ein solches System die Anfangswerte $D_0^{(i)}$, $D_1^{(i)}$ als Kettenbrüche angegeben. *G. Hoheisel* (Köln).

Kamenetzky, I. M.: Sur l'interpolation au moyen des dérivées et sur les procédés d'interpolation correspondants. I. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 356—358 (1939).

L'A. dà le condizioni necessarie e sufficienti cui deve soddisfare una successione di numeri interi non negativi $n_0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_m$ perchè, per ogni successione x_0, x_1, \dots, x_m di punti del piano complesso e per ogni successione c_0, c_1, \dots, c_m di numeri, esista e sia unico il polinomio $f_m(x)$ di grado minore o uguale ad m per cui $f_m^{(n_i)}(x_i) = c_i$. — Tali condizioni sono: 1) $n_i \leq i$, 2) per ogni i esista un j tale che $n_i = n_j = j$; la successione n_0, n_1, \dots, n_m viene detta allora graduata. — Data una successione infinita $n_0 \leq n_1 \leq \dots$ di numeri tale che ogni successione parziale sia graduata e una funzione $f(x)$, l'A. chiama procedimento di interpolazione (P_{n_i}) la successione di polinomi $f_m(x)$ determinati come sopra facendo $c_i = f^{(n_i)}(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, m$). — Per $n_i = 0$ e $n_i = i$ si ottengono i procedimenti d'interpolazione di Newton e Abel. — L'A. esprime in forma integrale il resto $R_m(x) = f(x) - f_m(x)$ e dà teoremi di convergenza relativi a questo procedimento di interpolazione che sono generalizzazioni di teoremi di convergenza delle serie generalizzate di Abel. *Luigi Beretta*.

Bernstein, Serge: Quelques applications de la méthode paramétrique à l'étude des formules de quadrature. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 15, Nr 1, 3—16 u. franz. Text 16—29 (1938) [Ukrainisch].

Ist $q(x)$ eine nicht abnehmende Funktion ($q(-\infty) = 0$, $q(+\infty) = 1$), deren Potenzmomente bis zur Ordnung $2n + 1$ existieren, so kann man aus dem Bestehen einer für alle Polynome vom Grade $2n$ richtigen Quadraturformel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dq(x) = \sum_{\alpha=1}^n C_{\alpha} \{P(x_{\alpha}) - P(y_{\alpha})\} + P(x_{n+1}); \quad x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}, \quad y_1 < y_2 < \dots < y_n \quad (1)$$

mit den gegebenen Koeffizienten $C_{\alpha} \geq q(x_{\alpha+1} - 0)$, falls sie nicht identisch erfüllt ist, schließen $x_1 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < x_{n+1}$ (A). Wenn die obige Funktion $q(x)$ mehr als eine Wachstumsstelle besitzt, so muß $\varepsilon_{\alpha} = (-1)^{\alpha}$ sein, wenn für alle Polynome vom Grade $2n$ die Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dq(x) = \sum_{\alpha=0}^m \varepsilon_{\alpha} P(x_{\alpha}), \quad x_0 < x_1 < \dots < x_m \quad (2)$$

besteht. Es ist für die Funktion $q(x)$ möglich, eine Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dq(x) = \sum_{\alpha=0}^{2n} (-1)^{\alpha} P(x_{\alpha}), \quad x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} \quad (3)$$

anzugeben, die für alle Polynome vom Grade $2n + 1$ richtig ist. Es ist möglich, eine Formel vom Typus (2) zu ermitteln, deren Abszissen der Ungleichung (A) genügen, während die Koeffizienten beliebig gewählt werden können ($C_1 \geq C_2 \geq \dots \geq C_n \geq 1$). Ist $t(x) = q_1(x) - q_2(x)$ eine Funktion beschränkter Schwankung, während die Funktionen $q_1(x)$ und $q_2(x)$ den oben angegebenen Bedingungen entsprechen, so kann man eine Formel (4) $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dt(x) = \sum_{\alpha=1}^m \varepsilon_{\alpha} P(x_{\alpha})$ herstellen, die für alle Polynome vom Grade $2n + 1$ richtig ist und in der $\varepsilon_{\alpha} = \pm 1$;

$x_1 < x_2 < \dots < x_m$; $m \leq 4n$ und $\sum_{\alpha=1}^{2k} \varepsilon_{\alpha} = 0$ für beliebiges $k < 2n$ ist. Man kann aber auch eine analoge Formel ermitteln, die für alle Polynome vom Grade $2n$ richtig ist, wo $\varepsilon_{\alpha} = \pm 1, \pm 2$;

$x_1 < x_2 < \dots < x_m$; $m \leq 2n$ und $-1 \leq \sum_{\alpha=0}^l \varepsilon_{\alpha} \leq 1$, $\sum_{\alpha=1}^m \varepsilon_{\alpha} = 0$ für beliebiges $l < 2n$ gilt. Sind alle Minima der stetigen Funktion $t(x)$ gleich 0 und ihr absolutes Maximum M , so gibt es eine für alle Polynome vom Grade $2n$ gültige Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dt(x) = C \sum_{\alpha=0}^{2m-1} (-1)^{\alpha} P(x_{\alpha}); \quad m \leq n, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_m \quad (5)$$

bei beliebig vorgegebener Konstante $C \geq M$. Zur Behandlung von Fragestellungen, die auf Tschebyscheff zurückgehen, wird zunächst der Begriff eines normalen Gleichungssystems

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k dt(x) = \alpha_k = C \sum_{\beta=1}^{2m-1} (-1)^\beta x_\beta^k; \quad k = 1, 2, \dots, 2n \quad (6)$$

erläutert; für ein derartiges System muß man für ein gegebenes $C \geq 0$ $m = n$ wählen, um reelle Lösungen $x_0 < x_1 < \dots < x_{2m-1}$ zu erhalten. Bei anormalen Systemen (6) gibt es ausgezeichnete Werte von $C = C_m$, die $2m$ Abszissen entsprechen. Man erkennt, daß, wenn ein System (6) für $C = C_0$ und $m = N$ reelle Lösungen zuläßt, dies auch für $C > C_0$ gilt, und keiner dieser Werte von C wird ausgezeichnet sein, wenn $m < N$ ist. Wenn das System (6) (mit reellen Lösungen für genügend große C) normal ist, wie immer $m \leq N$ ist, so existiert für jeden Wert von $m < N$ eine ausgezeichnete Konstante C_m , so daß das System (6) für $k = 1, 2, \dots, 2m+1$ erfüllt ist. Es folgt ein analoger Satz für anormale Systeme und ein Satz über notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß das System (6) reelle Lösungen zuläßt.

F. Knoll (Wien).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Bernstein, Serge: Sur la meilleure approximation de $|x|^p$ par des polynomes de degrés très élevés. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 2, 181—190 (1938).

Wird das Maß der besten Approximation einer Funktion $f(x)$ im Intervalle (a, b) durch Polynome n -ten Grades mit $E_n[f(x); a, b]$ bezeichnet, so lautet das Hauptergebnis der Arbeit:

$$E_n[|x|^p; -1, +1] = \frac{\left| \sin \pi \frac{p}{2} \right|}{\pi n^p} \Gamma(p) \left(1 - \frac{\vartheta}{p-1} \right) \quad \begin{matrix} p > 2 \\ 0 < \vartheta < 1 \end{matrix}$$

[für $p = 1$ siehe Acta math. 37, 1—57 (1914)]. Beim Beweise spielt außer der Hauptformel

$$n^p |x|^p = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi p}{2} \cos n \arcsin x \int_0^\infty \frac{u^{p-1} du}{(e^u + e^{-u}) \left(1 + \frac{u^2}{n^2 x^2} \right)} + \varepsilon_n + R_n(x)$$

[wo $\varepsilon_n \rightarrow 0$ mit $n \rightarrow \infty$ und $R_n(x)$ ein Polynom n -ten Grades bedeutet] noch die folgende bemerkenswerte Beziehung eine Rolle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p E_n[|x|^p; -1, +1] = E_1^*[f_p(x); -\infty, +\infty].$$

Hier ist

$$f_p(x) = -\frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi p}{2} \cos x \int_0^\infty \frac{u^{p+1} du}{(e^u + e^{-u}) (u^2 + x^2)},$$

und E_1^* bedeutet das Maß der besten Approximation durch ganze transzendente Funktionen ersten Grades.

E. Egerváry (Budapest).

Favard, J.: Sur un résultat relatif à l'approximation des fonctions. Bul. fac. şti. Cernăuţi 12, 162—166 (1939).

Wenn die Funktion $f(x)$ im Intervalle (a, b) eine stetige $(n+1)$ -te Derivierte hat, deren Betrag daselbst unterhalb M bleibt, und wenn das Maß ihrer besten Approximation auf der Punktmenge

$$(a \leq) x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} (\leq b)$$

durch Polynome n -ten Grades gleich ϱ_0 ist, so ist nach de la Vallée-Poussin

$$\min(x_{k+1} - x_k) > \frac{(n+1)!}{(b-a)^n} \cdot \frac{2\varrho_0}{M}.$$

Verf. gibt eine kurze, direkte Ableitung dieser Ungleichung sowie deren Übertragung auf trigonometrische Polynome.

E. Egerváry (Budapest).

Raikov, D. A.: On the local approximation of differentiable functions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 24, 653—656 (1939).

In der Arbeit wird der folgende Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Approximierbarkeit einer Funktion nachgewiesen: Die Funktion $f(x)$ besitzt im Intervalle (a, b) dann und nur dann eine n -te Ableitung, welche einer Lipschitzbedingung vom Grade $\alpha \leq 1$ genügt, wenn für alle x_1, x_2 aus (a, b) die Ungleichung $E_n[f(x); x_1, x_2]$

$\leq C|x_1 - x_2|^{n+\alpha}$ besteht. Hier bedeutet $E_n[f(x); x_1, x_2]$ das Maß der besten Approximation der Funktion $f(x)$ im Intervalle (x_1, x_2) durch Polynome n -ten Grades, und C ist eine von x_1, x_2 unabhängige Konstante. Der Beweis beruht auf der Ungleichung $|\Delta_h^{n+1}f(x_0)| \leq 2^{n+1}E_n[f(x); x_0, x_0 + n + 1h]$, wo $\Delta_h^{n+1}f(x_0)$ die $n+1$ -te Differenz von $f(x)$ für das Intervall h an der Stelle $x = x_0$ bedeutet. *E. Egerváry.*

Tschakaloff, Ljubomir: Trigonometrische Polynome mit einer Minimumeigenschaft. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 9, 13—26 (1940).

Die von Landau aufgeworfene Frage nach der „genauen“ unteren Grenze P_n von $\frac{g(0)}{a_1 - a_0}$, wo

$$g(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots + a_n \cos n\varphi$$

ein positiv-definites Polynom n -ter oder niederer Ordnung und

$$a_0 \geq 0, a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0; a_1 > a_0$$

ist, wurde vor Landau [Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 2, 209—210 (1933) u. 5, 141 (1936); dies. Zbl. 13, 348] bereits vom Verf. in bulgarischer Sprache 1923 behandelt. Die über die Ergebnisse von Landau ($P_2 = 7, P_3 = P_4 = P_5 = 6$) hinausgehenden Erkenntnisse werden vom Verf. in der vorliegenden Arbeit neuerlich mitgeteilt. Nachdem gezeigt wurde, daß die untere Grenze allgemein tatsächlich erreicht wird, wird ermittelt, daß $P_6 = 6 - t$ ist, wo t die reelle Wurzel der kubischen Gleichung $5t^3 - 11t^2 + 15t - 1 = 0$ ist. Es zeigt sich, daß ähnliche Gedankengänge,

die zu P_6 führten, auch für P_7 den Wert $6 - 4 \frac{1 - z\sqrt{5}}{2z + 5 - \sqrt{5}}$ ergeben, wo z die reelle

Wurzel von $z^3 + z^2 - \sqrt{5} + 2 = 0$ ist. Rasch erkennt man: $P_7 = P_8 = P_9$. Ebenso leicht ist die Ungleichung $P_{11} > 5,792$ zu gewinnen. *F. Knoll (Wien).*

Favard, J.: Sur les meilleurs procédés d'approximation. Ann. Chaire Phys. Math., Kiev 4, 164—168 (1939).

L'aut. a défini un meilleur procédé d'approximation des fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques (voir ce Zbl. 17, 251). L'aut. se propose ici de donner la forme explicite des coefficients de sommation $\delta_k^m(n)$, qui interviennent dans le cas où la fonction est à $n^{\text{ème}}$ dérivée bornée et intégrable et trouve

$$\delta_k^m(n) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{k\pi}{2m} \right)^n \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \cotg x \right]_{x=\frac{k\pi}{2m}}, & n \text{ impair,} \\ \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{k\pi}{2m} \right)^n \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{-1}{\sin x} \right) \right]_{x=\frac{k\pi}{2m}}, & n \text{ pair.} \end{cases}$$

On remarque aussi que les procédés de sommation engendrés par les constantes $\delta_k^m(n)$

sont du type suivant: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) u_k$, pour la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. La condition de per-

manence est satisfaite si $g(x)$ est à variation bornée dans l'intervalle fermé $(0, 1)$ et si $g(x) \rightarrow g(0) = 1$, pour $x \rightarrow 0$. *T. Popoviciu (Cernăuți).*

Dickinson, D. R.: On Tchebycheff polynomials. Quart. J. Math., Oxford Ser. 10, 277—282 (1939).

$n+1$ reelle, in $a \leq x \leq b$ stetige Funktionen $\varphi_\nu(x)$ ($\nu = 0 \dots n$) bilden ein

T -System n -ter Ordnung in $\langle a, b \rangle$, wenn jede Linearkombination $P_n(x) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu \varphi_\nu(x)$

mit reellen, nicht sämtlich verschwindenden a_ν in $\langle a, b \rangle$ höchstens n verschiedene Nullstellen hat; $P_n(x)$ heißt T -Polynom des Systems [Bem.: besser hieße es T -Aggregat, da die $\varphi_\nu(x)$ nicht Polynome zu sein brauchen]. Ist s die Zahl der Nullstellen mit Zeichenwechsel, d diejenige der Nullstellen ohne Zeichenwechsel von $P_n(x)$, so ist zunächst $s + 2d \leq n$. Ziel der Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes: Werden in $\langle a, b \rangle$ s verschiedene Punkte x_i und d weitere verschiedene Punkte y_j beliebig vor-

gegeben, so kann man zu vorgelegtem T -System stets ein T -Polynom $P_n(x)$ der Ordnung $n = s + 2d$ finden, das in den x_i bzw. y_j zeichenwechselnde bzw. zeichenerhaltende Nullstellen hat; $P_n(x)$ ist durch diese Nullstellen keineswegs eindeutig festgelegt, wie an einem Beispiel gezeigt wird.

Harald Geppert (Berlin).

Geronimus, J.: Sur l'approximation des fonctions continues par les polynomes généralisés soumis aux liaisons linéaires. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 15, Nr 2, 57—63 u. franz. Zusammenfassung 63—64 (1938) [Ukrainisch].

La famille des fonctions $\varphi_n(z)$ régulières dans un domaine D est dite système de Tchebycheff si l'expression $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(z)$, $\sum_{k=0}^n |a_k| > 0$, (appelée le polynome généralisé d'ordre n) admet au plus n zéros dans D . Soit B un domaine fermé situé à l'intérieur de D . On appelle les relations $\omega_r(P_n) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(r)} a_i$, ($r = 1, 2, \dots, s$)

liaisons linéaires si chaque polynome généralisé $P_n(z)$ soumis aux conditions $\omega_r(P_n) = 0$ admet au plus $n - s$ zéros dans B . En suivant la marche classique de Tonelli l'auteur démontre que toute fonction $F(z)$ continue dans B y admet un polynome généralisé $P_n^*(z)$ d'approximation minimum soumis aux liaisons $\omega_r(P_n) = c_r$ ($r = 1, 2, \dots, s$); la différence $F(z) - P_n^*(z)$ doit atteindre son module maximum en $n - s + 2$ points de B au moins. Comme application il donne le résultat intéressant: soit

$q(z) = \sum_{p=0}^m \gamma_p z^{m-p} = \gamma_0 \prod_{p=1}^m (z - z_p)$, $|z_p| > 1$. Alors pour chaque fonction rationnelle

$\varphi(z) = \frac{1}{q(z)} (\sigma_0 z^{n+m} + \sigma_1 z^{n+m-1} + \dots + \sigma_{n+m})$, soumise à la condition $\sum_{p=0}^{n+m} \sigma_p \alpha_p = c$,

on a $\max |\varphi(z)| \geq |c| |\alpha_0 \bar{\gamma}_m + \alpha_1 \bar{\gamma}_{m-1} + \dots + \alpha_m \bar{\gamma}_0|^{-1}$, $|z| \leq 1$. Considérations analogues dans le domaine réel.

N. Obrechhoff (Sofia).

Lifschetz, M.: On some questions concerning the determinate case of Hamburger's moment problem. Rec. math. Moscou, N. s. 6, 293—304 u. engl. Zusammenfassung 304—306 (1939) [Russisch].

Nach dem Auszug referiert. $D_k(t)$ ($-\infty < t < \infty$) sei ein vollständiges, normiertes Orthogonalsystem von Polynomen, das zu einer beliebigen Lösung $\sigma(t)$ des Hamburgerschen Momentenproblems: $\int_{-\infty}^{\infty} t^p d\sigma(t) = s_p$ ($p = 0, 1, \dots$) gehört [Math.

Ann. 81, 235—319; 82, 120—164 (1920)]. $Q(x)$ und $V(x)$ mögen die im zitierten Artikel angegebene Bedeutung haben. Dann wird bewiesen: Notwendig und hinreichend dafür,

daß eine Funktion $\varphi(t)$, für welche das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t) d\sigma(t)$ existiert, in der Form $\varphi(t)$

$= \sum_0^{\infty} c_k D_k(t) \left(\sum_0^{\infty} c_k^2 < \infty \right)$ darstellbar sei, ist die Existenz eines Wertes λ , für welchen die

Partialbruchentwicklung $\frac{\varphi(t)}{Q_\lambda(t)} = \sum_1^{\infty} \frac{\alpha_k}{t - \xi_k} \left(\sum_1^{\infty} \left| \frac{\alpha_k}{\xi_k} \right| < \infty \right)$ nach Nullstellen von

$Q_\lambda(t) = Q(t) + \lambda V(t)$ möglich ist. Die Ordnung ϱ_1 der Funktion $F(x) = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2p}}{s_{2p}}$ kann

die Ordnung ϱ von $Q(x)$ nicht überschreiten. Im Falle der Gleichheit kann der Typ von F den Typ von Q nicht überschreiten. Sind $\{\eta_k\}$, $\{\mu_k > 0\}$ ($k = 0, 1, \dots$)

Folgen reeller Zahlen, und ist $\sum_0^{\infty} \mu_k \eta_k^p = s_p$ ($p = 0, 1, \dots$), so ist das Momenten-

problem bestimmt, wenn der Konvergenzexponent ϱ^* der Folge $\{\eta_k\}$ der Ungleichung $\varrho^* < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k \lg 2k}{\lg s_{2k}}$ genügt. Dies findet Anwendung in der Theorie der quasianalytischen Funktionen.

Georg Tautz.

Folgen und Reihen:

Bennett, G. T.: Continuants and precontinuants. Proc. Cambridge Philos. Soc. 35, 548—561 (1939).

Considérons les relations de récurrence

$$(*) \quad u_{n+1} = a_n u_n + u_{n-1}.$$

Sous les conditions initiales $u_0 = 0, u_1 = 1$, les nombres u_0, u_1, \dots , exprimés en fonctions des a_n , sont les continuants correspondants aux paramètres a_1, a_2, \dots . Il est avantageux alors de désigner u_{n+1} par (a_1, a_n) ou simplement par $(1, n)$. En posant $u_m = 0, u_{m+1} = 1$ et en calculant les u_n à l'aide de (*), on trouve les précontinuants u_0, u_1, \dots, u_{m-1} et les continuants u_m, u_{m+1}, \dots . On trouve facilement

$$u_n = (-1)^{m-n-1} (n+1, m-1), \quad n = 0, 1, \dots, m-1 \quad (u_{m-1} = 1)$$

$$u_n = (m+1, n-1), \quad n = m+2, m+3, \dots$$

En donnant à m les valeurs $0, 1, 2, \dots$ on peut former le tableau de tous les continuants et précontinuants relatifs aux paramètres a_1, a_2, \dots . Au lieu de ce tableau l'aut. considère le suivant, formé par les expressions $[m, n]$, où

$$[n, n] = 0, \quad [n, n+1] = (-1)^n, \quad [n, m] = -[m, n],$$

$$[m, n] = (-1)^m (m+1, n-1) \text{ si } m < n,$$

qui est donc symétrique gauche. De cette façon les diverses relations entre les continuants s'écrivent sous des formes très symétriques. Par exemple, la relation bien connue d'Euler devient $[m, n] [l, r] + [n, l] [m, r] + [l, m] [n, r] = 0$. L'aut. en déduit une série d'autres relations et signale aussi diverses autres relations satisfaites par des nombres quelconques vérifiant (*), en insistant sur le cas particulier $a_1 = a_2 = \dots$. On peut traiter de la même manière le cas plus général $u_{n+1} = a_n u_n + b_n u_{n-1}$. *C. Popoviciu* (Cernăuți).

Barone, Henry G.: Limit points of sequences and their transforms by methods of summability. Duke math. J. 5, 740—752 (1939).

Die Note verfolgt im wesentlichen das Ziel, festzustellen, wieweit gewisse Transformationen von Zahlenfolgen die Eigenschaft (E) haben, jede beschränkte komplexe Zahlenfolge (s_n) in eine Folge (σ_n) überzuführen, deren Häufungspunkte eine zusammenhängende Menge bilden. Dazu wird zunächst gezeigt, daß eine beschränkte Folge (s_n) selbst eine zusammenhängende Menge von Häufungspunkten hat, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_{n+1} - s_n| = 0$ gilt. Sodann werden für Dreiecksmatrizen $\|a_{nk}\|$ ($k = 0, 1, \dots, n$; $n = 0, 1, 2, \dots$) verschiedene hinreichende Bedingungen angegeben, unter denen sie

eine Transformation $\sigma_n = \sum_{k=0}^n a_{nk} s_k$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) liefern, die die Eigenschaft (E) besitzt bzw. nicht besitzt. Das erstere trifft z. B. zu, wenn $\sum_{k=0}^n |a_{nk}| < M$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) und $\lim_{n \rightarrow \infty} (|a_{nn}| + \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk} - a_{n-1,k}|) = 0$ gilt, das letztere dagegen, wenn

$|a_{nn}| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}| \geq P > 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) gilt. Speziell werden dann die Hölderschen,

Cesàroschen, Rieszschen, die de la Vallée-Poussinsche und die Euler-Knoppschen Transformationen untersucht. Für die Cesàroschen Transformationen z. B. ergibt sich, daß das (C, r) -Verfahren (r beliebig komplex, nur $\neq -1, -2, \dots$) für $\Re r > 0$ die Eigenschaft (E) hat, für $\Re r \leq 0$ dagegen nicht. *F. Lösch* (Rostock).

Vignaux, J. C.: Sätze über die verallgemeinerte Borelsche Summationsmethode. Contrib. estud. ci. fis. mat. 1, 543—544 (1938) [Spanisch].

Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^{n\delta+r}}{\Gamma(n\delta+r+1)} = U_{\delta,r}(x)$, worin δ eine positive reelle

und r eine ganze positive Zahl bedeuten, für alle x konvergiert und das Integral $\int_0^{\infty} e^{-x} U_{\delta,r}(x) dx = S$ existiert, so heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ (B_{δ}, r) -summierbar mit der Summe S . Über diese verallgemeinerte Borelsche Summationsmethode spricht der Verf. folgende beiden Sätze aus: 1. Ist die Reihe $(1) (B_{\delta}, r)$ -summierbar mit der

Summe S , so ist (1) auch $(B_\delta, \delta + r)$ -summierbar mit der gleichen Summe. 2. Ist die Reihe (1) (B_δ, r) -summierbar mit der Summe S , so besitzt die Reihe $0 + u_0 + u_1 + \dots$ die nämliche Eigenschaft. Lammel (Frag).

Sidon, S.: Über Potenzreihen mit monotoner Koeffizientenfolge. Acta Litt. Sci. Szeged 9, 244—246 (1940).

Es wird darauf hingewiesen, daß es vermöge eines Satzes von Kempner [Math. Ann. 85, 49—59 (1922)] möglich ist, Fragen aus dem sog. Kakeyaschen Problemkreis, die sich auf Potenzreihen, deren Koeffizienten eine k -fach monotone Nullfolge bilden, beziehen, zu erledigen; gezeigt wird die Methode an dem Satz von Eneström-Kakeya und an einem Satze von Fejér (dies. Zbl. 16, 108). F. Knoll (Wien).

Fastperiodische Funktionen:

Bochner, S.: A uniqueness theorem for analytic almost-periodic functions. Duke math. J. 5, 937—940 (1939).

Die Funktionen $f_n(s)$, ($s = \sigma + it$, $n = 1, 2, \dots$) seien im offenen Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ analytisch, im abgeschlossenen gleichmäßig stetig, fastperiodisch und beschränkt.

Setzt man $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \chi(t) dt = M_t \chi(t)$, so wird gezeigt: Wenn es eine nichtnegative,

nicht identisch verschwindende, fastperiodische Funktion $\varphi(t)$ gibt, für welche $\lim_{n \rightarrow \infty} M_t(|f_n(\alpha + it)| \varphi(t)) = 0$ ist, so ist im ganzen offenen Streifen $\lim_{n \rightarrow \infty} M_t(|f_n(\sigma + it)|) = 0$. Der Beweis gründet sich auf die Tatsache, daß eine Folge von Funktionen $h_n(s)$, die in einem offenen Gebiet D gleichmäßig beschränkt sind, die gleichmäßig stetig sind, und deren Randwerte auf einem Kurvenbogen gleichmäßig gegen Null konvergieren, in jedem abgeschlossenen Teilbereich von D gleichmäßig gegen Null konvergiert (vgl. R. Nevanlinna, dies. Zbl. 14, 163). Georg Tautz.

Kac, M., E. R. van Kampen and Aurel Wintner: On the distribution of the values of real almost periodic functions. Amer. J. Math. 61, 985—991 (1939).

Soit Σ un ensemble de points dans un espace euclidien $\Theta: (x_1, \dots, x_n)$ à n dimensions; supposons que les conditions de périodicité soient satisfaites: si $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ est un point de Σ , le point $(x_1, \dots, x_j \pm 1, \dots, x_n)$ l'est aussi pour $j = 1, \dots, n$. Soit $\Theta_0: (\theta_1, \dots, \theta_n) \pmod{1}$ le tore à n dimensions obtenu en réduisant $\Theta \pmod{1}$, et Σ_0 l'ensemble obtenu en réduisant ainsi l'ensemble Σ . Représentons par $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ une direction dans Θ_0 et par Γ_λ la droite $\theta_j = \lambda_j t + \varphi_j$ ($j = 1, \dots, n$; $-\infty < t < +\infty$) dans Θ_0 , $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est la phase initiale. Si $M_\lambda = M_\lambda(\varphi_1, \dots, \varphi_n; q)$ est le nombre des points communs à Σ_0 et au segment $0 \leq t \leq q$ sur Γ_λ , M_λ possède une intégrale finie de Lebesgue étendue sur le tore à n dimensions (intégrale prise par rapport aux φ_j). — L'ensemble périodique Σ étant donné, la valeur probable $P_\lambda(l)$ du nombre d'intersections de Σ avec une „aiguille“ de longueur donnée l et de direction λ choisie au hasard dans Θ , est exprimée par

$$P_\lambda(l) = \int_{\Theta_0} M_\lambda(\theta_1, \dots, \theta_n; q) d\Theta_0,$$

où $d\Theta_0$ est l'élément de volume euclidien dans Θ_0 . Posons $P_\lambda(l) = l \cdot D_\lambda$ où D_λ ne dépend pas de l ; D_λ peut être interprétée comme la densité moyenne des points de Σ sur l'aiguille. En admettant que $\lambda_1 > 0$, on a

$$D_\lambda = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{\Phi} M_\lambda(0, \varphi_2, \dots, \varphi_n; 1/\lambda_1) d\Phi,$$

l'intégration étant étendue au tore à $(n-1)$ dimensions $\Phi: 0 \leq \varphi_j < 1$; $j = 2, \dots, n$. Soit $F(\theta_1, \dots, \theta_n)$ une fonction réelle et continue sur le tore Θ_0 et désignons par $G_a(\varphi_2, \dots, \varphi_n)$ le nombre de racines de l'équation $F(\lambda_1 t + \varphi_1, \dots, \lambda_n t + \varphi_n) = a$

dans l'intervalle $0 \leq t \leq 1/\lambda_1$ où λ_1 est constant, et par $N_T(a)$ le nombre de racines de la même équation dans l'intervalle $0 \leq t \leq T$; la limite (densité asymptotique des racines t) $E_\lambda(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_T(a)}{T}$ existe pour $-\infty < a < +\infty$ et elle est donnée par l'intégrale

$$E_\lambda(a) = \lambda_1 \int_{\Phi} G_a(\varphi_2, \dots, \varphi_n) d\Phi,$$

le domaine d'intégration étant le tore Φ à $(n-1)$ dimensions. Les auteurs donnent en particulier une formule explicite pour la densité asymptotique des racines de l'équation $\cos(\lambda_1 t + \varphi_1) + \cos(\lambda_2 t + \varphi_2) = a$. B. Hostinsky (Brünn).

Takahashi, Shin-ichi: Some new properties of Bohr almost periodic Fourier series. Jap. J. Math. 16, 99—133 (1939).

Verf. beweist mehrere Integrations-, Ableitungs- und Konvergenzsätze der Fourierschen Reihen der Bohrschen fastperiodischen Funktionen. Hier die hauptsächlichsten Sätze: I. Wenn $f(x) \sim \sum A_n e^{i\lambda_n x}$ eine Bohrsche fastperiodische Funktion und $F(x)$ ein Integral von $f(x)$ ist, so daß $F(x) = O(|x|^{1-p})$ ($0 < p \leq 1$), dann ist auch die Reihe $\sum (\text{sign } \lambda_n) A_n |\lambda_n|^{-q} e^{i\lambda_n x}$ ($0 < q < p$) die Fouriersche Reihe einer Bohrschen fastperiodischen Funktion. Wenn $f(x)$ einer Lipschitzbedingung genügt, dann ist auch die Reihe $\sum (\text{sign } \lambda_n) A_n |\lambda_n|^q e^{i\lambda_n x}$ ($0 < q < p$) die Fourierschen Reihe einer Bohrschen fastperiodischen Funktion. II. Wenn $f(x) \sim \sum A_n e^{i\lambda_n x (*)}$ eine Bohrsche fastperiodische Funktion ist und für jedes $\sigma > 0$ das Integral $\int_0^\infty (\sin \sigma t/t) [f(t+x) + f(-t+x)] dt$ gegen eine endliche Grenze gleichmäßig in x konvergiert, ferner für jedes $\varepsilon > 0$ gleichmäßig in x : $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_\varepsilon^\infty (\sin \sigma t/t) [f(t+x) + f(-t+x)] dt = 0$ gilt, dann hängt die Konvergenz der Teilsumme $S_\sigma(x)$ von $(*)$ gegen $f(x)$ in einem Punkt x ($S_\sigma(x) = \sum_{|\lambda_n| < \sigma} A_n e^{i\lambda_n x}$), wenn $\sigma \rightarrow +\infty$, nur vom Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung des Punktes x ab.

L. Cesari (Pisa).

Lewitan, B.: Neue Verallgemeinerung der fastperiodischen Funktionen von H. Bohr. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 15, Nr 2, 3—32 u. deutsch. Zusammenfassung 32—34 (1938) [Ukrainisch].

Verf. betrachtet Funktionen $f(x)$, die in jedem endlichen Intervall stetig sind und für die I. zu beliebigem $\varepsilon > 0$, $N > 0$ sich eine relativdichte Menge reeller Verschiebungszahlen $\tau(f; \varepsilon, N)$ angeben läßt, so daß in $|x| < N$ gilt: $|f(x \pm \tau) - f(x)| < \varepsilon$, II. diese Verschiebungszahlen die Eigenschaft haben: $\tau(\varepsilon, N) + \tau(\varrho, N) = \tau(\delta, N)$, wobei $\delta(\varepsilon, \varrho) \rightarrow 0$ strebt, wenn $\varepsilon \rightarrow 0$ und $\varrho \rightarrow 0$ geht. Er beweist, daß auch Summe, Differenz und Produkt solcher Funktionen den Bedingungen I., II. genügen, und daß man zu jedem ε, N eine relativ dichte Menge ganzer Verschiebungszahlen finden kann.

Setzt man $M\{f(x)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(x) dx$, ist ferner $\overline{M}\{|f(x)|^2\} < \infty$ und hat $M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$

einen Sinn für alle reellen λ [die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz und gleichmäßige Existenz dieser Mittelwerte werden im 2. Abschnitt entwickelt], so entspricht $f(x)$ eine Fourierreihe $f(x) \sim \sum A_\nu e^{i\lambda_\nu x}$, und man kann zu jedem ε, N ein mit diesen Fourierexponenten gebildetes trigonometrisches Polynom $P(x)$ finden derart, daß $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ für $|x| < N$. Zwei Funktionen $f(x), g(x)$, die den bisher genannten Bedingungen genügen und identische Fourierreihen haben, sind demzufolge identisch. Am Schluß beweist Verf., daß unter genügend allgemeinen Voraussetzungen die beschränkten Lösungen linearer Differentialgleichungen mit fastperiodischen Koeffizienten Funktionen sind, die unter die obigen Voraussetzungen I, II fallen. — Nach dem Auszug besprochen. Harald Geppert (Berlin).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Rádl, Franz: Über die Teilbarkeit des gewöhnlichen Differentialpolynoms dritter Ordnung durch ein ähnliches Polynom zweiter Ordnung. Math. Z. 45, 719—734 (1939).

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung der dies. Zbl. 21, 403 referierten. Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen für die ν -indizierte linksseitige Teilbarkeit eines Differentialpolynoms 3. Ordnung $a(y)$ durch ein solches 2. Ordnung $b(y)$. Die Untersuchungen beruhen auf der Einführung von partikulären Resultanten (S. 722): „welche durch die Beziehung — $R_i = \delta_i \cdot a(\beta_i)$ — definiert werden sollen; die Werte δ_i seien unabhängige Lösungen der zu b adjungierten Gleichung“. Die β_i sind l. u. Lösungen von $b(y) = 0$. [Die Zuordnung der δ_i zu den β_i hat dabei so zu geschehen, daß die zum Beweis von (10), S. 724, benötigten Formeln gültig sind. Dieser Umstand wäre gelegentlich zu berücksichtigen.] Verf. beweist nun induktiv eine Darstellung dieser partikulären Resultanten und gewinnt daraus die gesuchten Teilbarkeitsbedingungen. Adam Schmidt (Braunschweig).

McShane, E. J.: On the uniqueness of the solutions of differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 755—757 (1939).

Verf. beweist folgenden Satz: „Sei $y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, ($i = 1, 2, \dots, n$), (1), ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, in dem die Funktionen $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ für alle x, y_1, \dots, y_n , $a \leq x \leq b$, definiert sind; wenn eine in (a, b) integrierbare Funktion $M(x)$ existiert, so daß für alle x von (a, b) , für alle y und für alle η_i die Ungleichungen $[f_i(x, y_1 + \eta_1, \dots, y_n + \eta_n) - f_i(x, y_1, \dots, y_n)] \eta_i \leq M(x) (\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, gelten, wenn ferner $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$, $\{Y_1(x), \dots, Y_n(x)\}$ zwei Lösungen von (1) sind $[y_1(x), \dots, Y_n(x)$ absolut stetige Funktionen] und $y_i(\bar{x}) = Y_i(\bar{x})$ gilt, dann gilt auch $y_i(x) = Y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, für alle $\bar{x} \leq x < b$.“ — In diesem Satz werden unter anderem auch das Lipschitzsche Eindeigkeitskriterium (vgl. Carathéodory, Reelle Funktionen, S. 674—675. Berlin 1918) und ein vom Verf. Graves zugeschriebenes Theorem verallgemeinert. Wenn es sich um eine einzige Gleichung handelt, stellt sich der Satz als ein Sonderfall eines Tonellischen Theorems heraus [Rend. R. Accad. Lincei 1, 272—277 u. bes. 272—274 (1925)]; Tonelli gelangte mit fast analogen Gedankengängen zu diesem Ergebnis, ausgehend von einer Bemerkung, die dem Verf. zufolge, den Gravesschen Satz darstellt. Das hier Gesagte ist Gegenstand einer kürzlich erschienenen Mitteilung von L. Giuliano (dies. Zbl. 20, 298), in der der Tonellische Satz verallgemeinert wird. L. Cesari (Pisa).

Boulanger, J.: Sur une équation différentielle linéaire du second ordre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 8, 538—560 (1939).

Es wird die Differentialgleichung

$$(1) \quad y'' + f(x)y = 0$$

mit den Randbedingungen

$$(2) \quad y(a) = 0, \quad y'(b) = 0 \quad \text{und} \quad (3) \quad y(a) = A, \quad y'(b) = B$$

behandelt; dabei wird f als stetig und positiv für $a \leq x \leq b$ vorausgesetzt. Die Beweise stützen sich auf das Iterationsverfahren von Picard. Zunächst wird bewiesen: Wenn die Randwertaufgabe (1), (3) für $A > 0$, $B \geq 0$ eine Lösung hat, die im ganzen Intervall positiv ist, so kann man sie durch das Iterationsverfahren

$$(4) \quad y_0(x) = A + B(x - a), \quad y_n''(x) + f(x)y_{n-1}(x) = 0, \quad y_n(a) = A, \quad y_n'(b) = B$$

erhalten; es gibt höchstens eine Lösung der genannten Art, und, wenn es eine gibt, hat die Randwertaufgabe (1), (2) nur die triviale Lösung $y \equiv 0$. — Weiterhin wird $A = 1$, $B = 0$ gewählt. Das Iterationsverfahren (4) läßt sich immer ansetzen. Für die erhaltene

Folge der y_n wird $v_0 = y_0$, $v_n = y_n - y_{n-1}$ gesetzt. Außerdem wird $T_n = \int_a^b f v_n dx$, $d_n = \frac{T_n}{T_{n-1}}$ eingeführt. Die d_n konvergieren monoton wachsend gegen einen Grenzwert

$d > 0$. Ist $d < 1$, so konvergiert $\sum v_n$ gegen eine positive Lösung y der Randwert-aufgabe (1), (3), und daher ist dann (1), (2) nicht lösbar. Ist $d > 1$, so findet keine Konvergenz statt. Der Fall $d = 1$ bedarf einer besonderen Untersuchung. Weiter werden hinreichende Bedingungen für $d < 1$ und $d > 1$ angegeben, die jedoch nicht sehr scharf sind. Z. B.: Wenn für die Lösung von $v'' + f(x) = 0$ und (2) die Ungleichung $v(b) \leq 1$ besteht, ist $d < 1$. Am Schluß wird die allgemeinere Differentialgleichung $y'' + f(x)y' + g(x) = 0$ mit $f(b) \neq 0$ behandelt. *Kamke* (Tübingen).

Hardy, G. H.: A note on a differential equation. Proc. Cambridge Philos. Soc. 35, 652—653 (1939).

Verf. beweist folgende Vermutung von Goldstein: Ist $y(x)$ eine für alle hinreichend großen x existierende Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - yy'' + 2(y'^2 - 1) = 0.$$

und ist $y' \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty$, so ist $y = x + \text{konst.}$

Kamke (Tübingen).

Mambriani, Antonio: Genesi ed integrazione in termini finiti di vaste classi d'equazioni differenziali lineari, aventi per coefficienti delle funzioni razionali intere. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 9, 27—43 (1940).

Verf. betrachtet den Operator $A^n P A^{r-n}$, worin $A = A(D)$ einen linearen Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten der Ordnung m , ν und n nicht negative ganze Zahlen $\nu \leq n$, $P = P(x)$ ein ganzzahliges Polynom der Variablen x vom Grade $\leq \nu$ bedeuten. Verf. beweist, daß dieser Operator einem linearen Differentialoperator der Ordnung $m\nu$ äquivalent ist, dessen Koeffizienten lineare ganze Funktionen der Grade $\leq \nu$ sind. Verf. beweist weiter, daß die Integration der Gleichung $A^n P A^{r-n} y = 0$ in endlichen Ausdrücken geleistet werden kann. — Seine interessanten Betrachtungen erweitert Verf. sodann auf allgemeinere Klassen von Differentialgleichungen und wendet seine Ergebnisse auf die Gleichungen

$$a_0 x y'' + (a_1 x + 2na_0) y' + (a_2 x + na_1) y = 0,$$

$$(a_2 x^2 + a_1 x + a_0) y'' + (b_1 x + b_0) y' - n[(n-1)a_2 - b_1] y = 0$$

an, in denen a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 Konstanten, n eine nicht negative ganze Zahl bedeuten.

G. Sansone (Firenze).

Márton, Kun Kuti: Über die homogenen linearen Differentialgleichungen, deren sämtliche Lösungen ganze Funktionen sind. Mat. fiz. Lap. 46, 152—168 u. dtsch. Zusammenfassung 169 (1939) [Ungarisch].

Considérons l'équation différentielle linéaire et homogène (*) $y^{(n)} + P_1(z)y^{(n-1)} + \dots + P_n(z)y = 0$. L'aut. donne d'abord une démonstration de la convergence de la série de puissances des solutions, en supposant que les P_i sont développables en séries de Laurent. Cette démonstration peut facilement être rendue rigoureuse et générale (l'aut. paraît admettre que l'inverse du rayon de convergence d'une série de Taylor soit donné par \lim , et non $\overline{\lim}$, de $\sqrt[n]{|a_n|}$). Si P_1 est une fonction entière, pour que toutes les solutions de (*) soient entières il faut et il suffit que toutes les P_i soient entières. Pour que toutes les solutions de (*) soient des polynômes il faut que les coefficients P_i soient des fonctions rationnelles de degré $-i$ respectivement. Comme application, l'aut. démontre, entre autre, que si la dérivée logarithmique d'une fonction entière n'est pas entière, la série de puissances de cette dérivée ne peut avoir tous ses coefficients positifs. En passant, l'aut. démontre le lemme suivant: Si les éléments d'un déterminant de Vandermonde sont tous distincts et positifs, tous les mineurs de ce déterminant sont différents de zéro. C'est un cas particulier d'une propriété déjà donnée par le ref. et d'après laquelle si les a_i sont > 0 et les ϱ_i sont réels, on a $\text{sg } \|a_i^{\varrho_i}\| = \text{sg } V(a_1, a_2, \dots, a_n) V(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$, V désignant le déterminant de Vandermonde [Gaz. mat. 36, 405—408 (1931)]. *T. Popoviciu* (Cernăuți).

Ta, Li: Über die allgemeine lineare Differentialgleichung. *Comment. math. helv.* **12**, 1—19 (1939).

Verf. zeigt, daß ein Fundamentalsystem der Lösungen von $y^{(n)} - \sum_{\lambda=0}^{n-1} f_{n-\lambda}(x) y^{(\lambda)} = 0$ gegeben wird durch

$$y_{\mu} = \frac{(x-c)^{\mu}}{\mu!} + \sum_{\varrho=0}^{\infty} \underbrace{\int_c^x \dots \int_c^x}_n \left(\sum_{\lambda=0}^{n-1} f_{n-\lambda}(x) \underbrace{\int_c^x \dots \int_c^x}_{n-\lambda} \right)^{\varrho} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \frac{(x-c)^{\mu-\lambda}}{(\mu-\lambda)!} f_{n-\lambda}(x) dx e^{(n-\lambda)+n},$$

$$(\mu = 0, 1, \dots, n-1).$$

Weiter werden mehrere spezielle Fälle behandelt. Verf. diskutiert auch die Irreduzibilität algebraischer Differentialgleichungen, dabei fehlt aber logische Genauigkeit.

M. Nagumo (Osaka).

Kienast, Alfred: Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Herrn Ta Li. *Comment. math. helv.* **12**, 20—24 (1939).

Verf. gibt wesentlich dasselbe Resultat wie die vorstehend besprochene Arbeit von Li Ta, aber in viel kompakterer Form.

M. Nagumo (Osaka).

Dumitraş, Ion: Sur la recherche des invariants de l'équation différentielle du second ordre. *Bul. fac. şti. Cernăuţi* **12**, 146—161 (1939).

Le problème de la recherche des invariants par rapport au groupe des transformations ponctuelles de l'équation (1) $y'' = f(x, y, y')$ est ramené par l'A. à un système de trois équations de Pfaff à sept fonctions inconnues des trois variables indépendantes, système qui exprime des conditions d'équivalence. Par la considération des conditions d'intégrabilité on le réduit à un système de huit équations aux différentielles totales dont les conditions d'intégrabilité fournissent la solution du problème. On démontre par ce fait que la solution du problème d'équivalence peut dépendre de huit constantes arbitraires dans le cas où l'équation (1) se ramène par une transformation de contact à $y'' = 0$, dans le cas contraire tout au plus de quatre constantes arbitraires. On arrive dans ce dernier cas à attacher par cette méthode à chaque équation (1) un espace à connexion affine.

Al. Pantazi (Bukarest).

Lewis jr., Daniel C.: Contributions to the transformation theory of dynamics. *Trans. Amer. Math. Soc.* **46**, 374—388 (1939).

Etant donnée une forme de Pfaff (1) $X_i dx^i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), on appelle transformation pfaffienne T , une transformation des variables $\bar{x} = \bar{x}(x)$ qui conserve le covariant bilinéaire de la forme (1); $a_{ij}(\bar{x}) \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s} = a_{rs}(x)$, $a_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x^j} - \frac{\partial X_j}{\partial x^i}$. Si le rang $2k$ du déterminant gauche symétrique $|a_{ij}|$ est inférieur à n , on peut s'arranger de façon que $a_{i\alpha} = 0$ ($\alpha = 2k+1, \dots, n$) et en ce cas T transforme entre elles les variables x^1, x^2, \dots, x^{2k} . En supposant $2k = n$ et en se plaçant dans un point d'équilibre, pris comme origine, $X_i(0) = 0$, l'A. montre que chaque transformation T , ou une de ses puissances, satisfait formellement à un système de la forme (2) $a_{ij} \frac{dx^j}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x^i}$,

où Q est une fonction des variables x , nulle à l'origine, en même temps que $\frac{\partial Q}{\partial x^i}$. Le système (2) est invariant aux transformations des variables et T fait correspondre au point $x^i(0)$ le point $x^i(t)$, t ayant une certaine valeur fixe. Si la forme (1) est réduite à la forme canonique $x^{2i} dx^{2i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, k$), (2) devient un système hamiltonien et T une transformation de contact. En ce cas, si les multiplicateurs ϱ_i de Q ne satisfont pas à des relations en nombres entiers, en posant $u^i = x^{2i-1} x^{2i}$, on peut réduire Q à la forme $Q = \varrho_i u^i + F(u) + \Phi(x)$, où F est au moins de degré 2 et au plus de degré $\frac{p}{2}$ et Φ est au moins de degré p dans x , p étant aussi grand que l'on veut. Le système (2) se réduit ainsi formellement à la forme canonique de Birkhoff [*Dynamical Systems* (1927), p. 93].

G. Vranceanu (Bucureşti).

Russyan, C.: Ein Fall der Integration des Systems der m Pfaffschen Differentialgleichungen mittels der n Integrale $u_i = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Commun. Inst. Sci. Math. et Méc., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 15, Nr 1, 31—68 u. deutsch. Zusammenfassung 68 (1938) [Ukrainisch].

Es sei (S) $\omega_1 = \dots = \omega_m = 0$ ein System von m unabhängigen Pfaffschen Gleichungen in p ($\geq m + 2$) Veränderlichen x_1, \dots, x_p . Ist $u_i(x_1, \dots, x_p) = c_i$ ($i = 1, \dots, q$) mit beliebigen Konstanten c_i ein Integral von (S) , so ist $q \geq m$, und das Gleichheitszeichen kann nur gelten, wenn (S) vollständig integrierbar ist. Der Verf. untersucht nun Systeme (S) , für deren größte Integrale von obiger Form $q \leq (p + m - 1)/2$ ist. Diese Untersuchungen stellen eine einfache Verallgemeinerung seiner früheren Betrachtungen (s. dies. Zbl. 8, 314) über den speziellen Fall $q = m + 1$ dar.

O. Borůvka (Brünn).

Pfeiffer, G. V.: Les systèmes jacobiens généralisés d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à plusieurs fonctions inconnues et la méthode spéciale d'intégration. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 251—266 (1939).

Die spezielle Methode zur Integration eines vollständigen Systems ist nichts anderes als die allgemeine Methode zur Integration eines Involutionsystems, angewendet auf den besonderen Fall eines vollständigen Systems. Das m -gliedrige vollständige System wird durch

Auflösung auf ein Jacobisches zurückgeführt: $X_i f = p_i + \sum_{\nu=1}^{1 \dots n} \xi_{i, m+\nu} p_{m+\nu} = 0$ ($i = 1, \dots, m$),

wo $(X_i X_k) \equiv 0$, und es wird eine Gleichung: $Y f = p_{m+1} - \sum_{\nu=1}^{2 \dots n} \nu p_{m+\nu} = 0$ hinzugefügt, so

daß ein $(m + 1)$ -gliedriges vollständiges System entsteht. Zur Bestimmung der ν , erhält man dann, wie Verf. sagt, ein verallgemeinertes Jacobisches System, und dieses ist gleichbedeutend mit einem m -gliedrigen vollständigen Systeme in $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}, v_2, \dots, v_n$. Man muß ein Lösungssystem v_2, \dots, v_n bestimmen, das eine willkürliche Konstante enthält, und behandelt dann das $(m + 1)$ -gliedrige vollständige System in derselben Weise. So gelangt man nach $n - 1$ Schritten zu einer unbeschränkt integrierbaren totalen Gleichung, durch deren Integration alles erledigt ist. Warum setzt aber der Verf. nicht einfach:

$Y f = \sum_{\nu=1}^{1 \dots n} \nu p_{m+\nu}$ und verlangt, daß alle $(X_i Y)$ verschwinden? Das Jacobische System für die ν , wäre doch dann in diesen linear und homogen! Sind u_1, \dots, u_{q+m} unabhängige Lösungen eines $(n - q)$ -gliedrigen vollständigen Systems in $x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m$, das durch Auflösung auf die Form eines Jacobischen Systems gebracht ist:

$$(1) \quad X_\nu(f) = \frac{\partial f}{\partial x_{q+\nu}} + \sum_{\mu}^{1 \dots q} \alpha_{\nu\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} + \sum_{\tau}^{1 \dots m} \beta_{\nu\tau} \frac{\partial f}{\partial z_\tau} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, n - q),$$

so kann man annehmen, daß u_{q+1}, \dots, u_{q+m} in bezug auf z_1, \dots, z_m von einander unabhängig sind. Versteht man dann unter $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ willkürliche Funktionen der u , die in bezug auf u_{q+1}, \dots, u_{q+m} von einander unabhängig sind, so werden z_1, \dots, z_m durch die Gleichungen $\Omega_1 = 0, \dots, \Omega_m = 0$ als Funktionen der x bestimmt und sind die allgemeinsten Lösungen eines Systems von $m(n - q)$ linearen partiellen Differentialgleichungen 1. O., das die Form hat:

$$(2) \quad \frac{\partial z_\tau}{\partial x_{q+\nu}} + \sum_{\mu}^{1 \dots q} \alpha_{\nu\mu} \frac{\partial z_\tau}{\partial x_\mu} = \beta_{\nu\tau} \quad (\nu = 1, \dots, n - q; \tau = 1, \dots, m).$$

Dieses System bezeichnet der Verf. als ein verallgemeinertes Jacobisches System. Seine Integration ist mit der von (1) äquivalent. Um (2) zu integrieren, fügt man in der vorhin an-

gegebenen Weise zu (1) eine neue Gleichung: $Y(f) = \frac{\partial f}{\partial x_q} + \sum_{\mu}^{1 \dots q-1} w_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} + \sum_{\tau}^{1 \dots m} v_\tau \frac{\partial f}{\partial z_\tau} = 0$

so hinzu, daß ein $(n - q + 1)$ -gliedriges vollständiges System entsteht. Dabei werden die $q - 1 + m$ Koeffizienten von $Y(f)$ durch ein verallgemeinertes Jacobisches System bestimmt, das mit einem $(n - q)$ -gliedrigen vollständigen Systeme in $n + m + q - 1 + m$ Veränderlichen äquivalent ist. Dem $(n - q + 1)$ -gliedrigen vollständigen Systeme aber entspricht ein verallgemeinertes Jacobisches System mit denselben Unbekannten z_1, \dots, z_m , das aus (2) durch Hinzufügung von m neuen Gleichungen entsteht. Diese Gleichungen sind nach den $\partial z_\tau : \partial x_q$ aufgelöst. Das so erhaltene System ist äquivalent mit einem $(n - q + 1)$ -gliedrigen vollständigen Systeme und wird nun in derselben Weise behandelt wie (2). So gelangt man nach

$q - 1$ Schritten zu einem unbeschränkt integrierbaren totalen System, das z_1, \dots, z_m als Funktionen von x_1, \dots, x_n bestimmt und das sich von den vorhergehenden verallgemeinerten Jacobischen Systemen dadurch unterscheidet, daß seine allgemeinsten Lösungen nicht von willkürlichen Funktionen abhängen, sondern nur von m willkürlichen Konstanten. Man kann schließlich, statt bei jedem Schritte ein Lösungssystem des betreffenden verallgemeinerten Jacobischen Systems zu nehmen, das eine willkürliche Konstante enthält, ein Lösungssystem mit m willkürlichen Konstanten benutzen. Man muß nur jedesmal dieses Lösungssystem so wählen, daß die m neuen Gleichungen, um die das ursprüngliche System (2) erweitert wird, nach diesen m Konstanten auflösbar werden. Das aber ist immer möglich. Erwähnt sei noch, daß jedes auftretende verallgemeinerte Jacobische System eine vollständige Lösung hat, die so gewählt werden kann, daß ihre wesentlichen Konstanten linear auftreten. Es ist mir hoffentlich gelungen, den Gedankengang der Arbeit verständlich zu machen. Rein theoretisch gesehen, gewährt diese entschieden neue beachtenswerte Einblicke in die behandelte Theorie. Deshalb hat auch die Einführung des Begriffs der verallgemeinerten Jacobischen Systeme ihre Berechtigung. Dagegen ist der praktische Nutzen der Entwicklungen nicht von Bedeutung. Es wird immer ein bloßer Zufall sein, wenn die wirkliche Integration eines vorgelegten Systems (1) auf diesem Wege gelingt. Engel (Gießen).

Petrowsky, I. G.: Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 3—68 (1939).

Die Funktionen $F_i(x_0, x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_N; \frac{\partial u_1}{\partial x_0}, \dots)$ eines Differentialgleichungssystems seien analytisch in jeder der Variablen x_0, u_1, \dots, u_N und deren Ableitungen. Ist n_j die Höchstordnung der vorkommenden Ableitungen von u_j , so sei F_i noch stetig in den reellen Variablen x_1, \dots, x_n mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung $o = 2n + 2\left[\frac{n+1}{2}\right] + 7 + \text{Max}_j(n_j)$. Außerdem ist das Vorkommen der Ableitungen noch in gewisser Weise eingeschränkt. Verf. zeigt, daß Lösungen u_j des Systems, die mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung $o + n_j - 1$ stetig sind, von selbst analytisch sind. Sie werden zunächst nur für reelle Werte von x_0 betrachtet und dann durch ein Approximationsverfahren für komplexe fortgesetzt, derart, daß sie den Cauchy-Riemannschen Gleichungen genügen. Weiterhin beweist Verf. die Existenz von Lösungen, die nicht in x_0 analytisch, aber mit Ableitungen beliebig hoher Ordnung versehen sind, unter der Bedingung, daß die F_i linear mit konstanten Koeffizienten in den u_j und ihren Ableitungen sind. Ist $c_{k_0, k_1, \dots, k_n}^{ij}$ der Koeffizient von $\partial^{k_0 + \dots + k_n} u_j / \partial x_0^{k_0} \dots \partial x_n^{k_n}$ in F_i , so soll die Determinante der Form $\sum c_{k_0, \dots, k_n}^{ij} \alpha_0^{k_0} \dots \alpha_n^{k_n}$ für ein passendes System reeller $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine reelle Wurzel $\alpha_0 \neq 0$ haben, ohne identisch Null zu sein. Unter schärferen Einschränkungen wird diese Aufgabe auch für nichtlineare Systeme gelöst.

Georg Tautz

Karimov, Dj. Kh.: Sur les solutions périodiques des équations différentielles non-linéaires du type parabolique. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 3—6 (1939).

Ein Existenzsatz betreffend die Lösungen der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) $\partial z / \partial t - a^2 \cdot \partial^2 z / \partial x^2 = \Phi(x, t) + \mu f(z)$. Unter gewissen, vom Verf. angeführten Bedingungen über die Funktionen Φ, f und die Konstanten a, μ besitzt die Gleichung (1) eine einzige mit stetiger Ableitung erster (in bezug auf t) und zweiter (in bezug auf x) Ordnung versehene und in bezug auf t periodische Lösung $z(x, t)$, welche die folgenden Anfangsbedingungen erfüllt: $z(0, t) = z(1, t) = 0$; $z(x, 0) = z(x, 1)$. Von den erwähnten Bedingungen ist die Periodizität der Funktion Φ in bezug auf t hervorzuheben. Zum Beweise des Satzes wird die Lösung mittels sukzessiver Approximationen konstruiert. O. Borůvka (Brünn).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Mindlin, J. A.: Propagation of waves in two dimensions. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 280—284 (1939).

Verallgemeinerung der d'Alembertschen Lösung der eindimensionalen Wellengleichung auf den zweidimensionalen Fall: Jede Lösung U der Gleichung $\partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 = \frac{1}{a^2} \partial^2 U / \partial t^2$, die im Unendlichen hinreichend stark verschwindet, läßt

sich darstellen durch (r, ϑ) sind Polarkoordinaten in der x -, y -Ebene):

$$(1) \quad U(r, \vartheta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} [f_n(r \cos \xi - at) + g_n(r \cos \xi + at)] e^{in\vartheta} \cos n\xi d\xi;$$

f_n, g_n müssen so beschaffen sein, daß das Integral konvergiert. Bezeichnet man $r \cos \xi$ mit X , so ist ferner zu fordern, daß $f_n(X - at), g_n(X + at)$ für $X \rightarrow \infty$ stärker Null werden als X^{-n} . Für $t = 0$ seien U und $\partial U / \partial t$ als Ortsfunktionen bekannt; Entwicklung dieser Funktionen in Fourierreihen nach ϑ gibt durch Vergleich mit der Lösung (1) Integralgleichungen für f_n, g_n ; die Lösung derselben wird explizit hingeschrieben, sie enthält Integrale über Tschebyscheffsche Polynome. *Bechert*.

Mindlin, J. A.: Solution of Cauchy-Dirichlet's external problem for a wave equation in the case of a circle. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 25, 285—288 (1939).

Lösung der Aufgabe: Gesucht ist außerhalb eines Kreises vom Radius 1 in der x - y -Ebene die Funktion U , welche der Gleichung $\partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 = 1/a^2 \partial^2 U / \partial t^2$ genügt und außerdem den Bedingungen: U und $\partial U / \partial t$ gegeben für $t = 0$, U gegeben für $t \geq 0$ am Rand des Kreises. Die Aufgabe läßt sich im wesentlichen mit den Methoden der vorhergehenden Arbeit erledigen (s. das vorsteh. Ref.).

Bechert (Gießen).

Einaudi, Renato: Il problema misto per l'equazione delle onde. Atti Accad. Sci. Torino 74, 470—480 (1939).

S bezeichne ein endliches Gebiet des dreidimensionalen Raumes, σ seine Berandung und x einen allgemeinen Punkt in S . Verf. löst das folgende Randwertproblem

- (1) $\Delta_2 f = \tilde{f}$,
 (2) $f = u(x); \dot{f} = v(x)$, x in S und $t = 0$, (3) $f = w(x, t)$, x auf σ und $0 \leq t \leq T$;
 darin bezeichnen u und v bis zu den vierten Ableitungen stetige Funktionen in S und w eine auf σ und für $0 \leq t \leq T$ mit ihren Ableitungen nach t bis zur 5. Ordnung stetige Funktion. Setzt man fernerhin voraus, daß auf σ und für $t = 0$ die Bedingungen $u = w, v = \dot{w}, \Delta_2 u = \ddot{w}, \Delta_2 v = \ddot{\dot{w}}$ erfüllt sind, und bezeichnet $G(x, x')$ die Greensche Funktion für Δ_2 bezüglich S , so genügt die Funktion

$$(4) \quad F(x, t) = \tilde{f}(x, t) + \int_{\sigma} \frac{dG(x, x')}{dn'} \ddot{\tilde{w}}(x', t) d\sigma' + \int_S G(x, x') \int_{\sigma} \frac{dG(x', x'')}{dn''} \ddot{\tilde{w}}(x'', t) d\sigma'' dS'$$

der Integralgleichung

$$(5) \quad \int_0^t (t - \tau) F(x, \tau) d\tau = \int_S G(x, x') [F(x', t) - \int_S G(x', x'') \omega(x'', t) dS''] dS',$$

in der $\omega(x, t) = \int_{\sigma} \frac{dG(x, x')}{dn'} \ddot{\tilde{w}}(x', t) d\sigma' + \Delta_2 u + t \cdot \Delta_2 v$ bezeichnet. — Aus (5) ge-

winnt Verf. eine Entwicklung von $F(x, t)$ nach den Eigenfunktionen des Kernes $G(x, x')$, deren gleichmäßige Konvergenz für x in S und $0 \leq t \leq T$ er beweist. Aus $F(x, t)$ gewinnt man mittels (4) \tilde{f} , und daher wegen (2) f , so daß das geschilderte Verfahren zum Existenzbeweis der Lösung des betrachteten Randwertproblems führt. Unter den genannten Voraussetzungen bleibt auch die Eindeutigkeit der gefundenen Lösung gesichert.

M. Picone (Roma).

Einaudi, Renato: Metodo risolutivo in un dominio sferico del problema misto per l'equazione delle onde. Atti Accad. Sci. Torino 74, 481—491 (1939).

In vorliegender Arbeit entwickelt Verf. die in der vorstehend besprochenen Abhandlung gegebene Lösung für den Fall, daß S eine Kugel um O mit dem Halbmesser a ist. In Polarkoordinaten r, θ, φ kann man die Lösung f in eine Reihe der Form

$f(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{2n+1} \psi_{nh}(r, t) Y_{nh}(\theta, \varphi)$ entwickeln, worin $\{Y_{nh}(\theta, \varphi)\}$ ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem von Kugelfunktionen und die $\psi_{nh}(r, t)$ Lösungen der

Gleichung (1) $\frac{\partial^2 \psi_{nh}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi_{nh}}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2} \psi_{nh} - \frac{\partial^2 \psi_{nh}}{\partial t^2} = 0$ bedeuten, die für $r = 0$ regulär sind und den nachstehenden Anfangs- und Randbedingungen genügen:
 (2) $\psi_{nh}(r, 0) = u_{nh}(r)$, $\frac{\partial \psi_{nh}}{\partial r} \Big|_{t=0} = v_{nh}(r)$, $\psi_{nh}(a, t) = w_{nh}(t)$. Nachdem Verf. gezeigt hat, daß die allgemeinste Lösung von (1) die Form

$$\psi_{nh} = r^n \cdot \Lambda^n \left[\frac{P_{nh}(t+r) - Q_{nh}(t-r)}{r} \right]$$

hat, in der P_{nh} und Q_{nh} willkürliche Funktionen sind und Λ den Operator $\Lambda = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ bedeutet, zeigt er, daß die Bestimmung der ψ_{nh} lediglich die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typ und analoger Gleichungen mit konstanten Koeffizienten benötigt.

M. Picone (Roma).

Stueckelberg, Ernst-C.-G.: Sur l'intégration de l'équation $\left(\sum_1^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - t^2 \right) \varrho = -\varrho$

en utilisant la méthode de Sommerfeld. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 21) 56, 43—45 (1939).

Die Lösung der im Titel angegebenen Gleichung wird unter Anwendung des Greenschen Satzes in vier Dimensionen durch Überlagerung von Lösungen der homogenen Gleichung, die nur von $\sum_1^4 (x_i - x_{i0})^2$ abhängen, aufgebaut. Durch Spezialisierung von ϱ auf eine vierdimensionale δ -Funktion ergibt sich die Greensche Funktion der homogenen Gleichung.

J. Meixner (Berlin).

Mathisson, Myron: Le problème de M. Hadamard relatif à la diffusion des ondes. Acta math. 71, 249—282 (1939).

Le problème de la diffusion des ondes posé par M. Hadamard dans ses recherches classiques au sujet du principe de Huygens (voir ce Zbl. 6, 205) consiste dans la question de savoir si l'onde qui propage une perturbation initialement limitée dans le temps et dans l'espace laisse ou non, après son passage, une perturbation résiduelle. On suppose que le phénomène est régi par une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. La réponse donnée par M. Hadamard est complète dans le cas où l'équation aux dérivées partielles est à un nombre impair de variables indépendantes: Toute équation de cette nature donne lieu à diffusion. Pour le cas où le nombre m de variables indépendantes est pair M. Hadamard a établi une condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'y ait pas de diffusion; mais la question de la recherche de toutes les équations sans diffusion, pour $m > 2$, restait ouverte. Dans le présent travail l'auteur s'occupe de cette question en se bornant aux équations de la forme suivante

$$\partial^2 u / \partial x_0^2 - (\partial^2 u / \partial x_1^2 + \partial^2 u / \partial x_2^2 + \partial^2 u / \partial x_3^2) + \sum_{\alpha=0}^3 A^\alpha \partial u / \partial x_\alpha + Cu = T. \quad (1)$$

Le résultat principal consiste dans le beau théorème que toute équation (1) sans diffusion est identique à l'équation des ondes sphériques (c'est à dire telle que $A^\alpha = C = 0$) ou se transforme en cette équation par la substitution $u = \lambda u'$, λ étant une fonction convenablement choisie.

O. Borůvka (Brünn).

● Baker, B. B., and E. T. Copson: The mathematical theory of Huygens' principle. London: Oxford univ. press 1939. 150 pag. 12/6.

Lagrange, René: Les familles de surfaces de révolution qui possèdent des harmoniques. Acta math. 71, 283—315 (1939).

Verf. gibt eine systematische Darstellung größtenteils bekannter Ergebnisse. Das Problem wird so behandelt, daß für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\varrho}{\lambda} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \varrho \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\lambda \varrho H_1^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) = 0$$

Lösungen von der Form $V = f(\eta, \theta) \cdot \Phi(\varphi) N(\eta) T(\theta)$

mit zweckmäßigem $f(\eta, \theta)$ gesucht werden. $\varrho = \varrho(\eta, \theta)$, $z = z(\eta, \theta)$, φ sind Zylinderkoordinaten, $\eta = \text{konst.}$ und $\theta = \text{konst.}$ zueinander orthogonale Rotationsflächenscharen, $\lambda = \lambda(\eta, \theta)$ eine zweckmäßig zu wählende Funktion und $H_1^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial \varrho}{\partial \eta}\right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \theta}\right)^2}$.

Es kommt auf eine leicht zu behandelnde Funktionalgleichung hinaus. Neben den bereits bekannten Rotationsflächen erscheinen die Rotationszykliden als Flächen der verlangten Art.

O. Volk (Würzburg).

Tolotti, C.: La formula di Green per i problemi al contorno con derivata obliqua in spazi curvi quali si vogliano. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 29, 285—293 (1939).

Weiterführung einer Arbeit von M. Picone und C. Miranda (vgl. dies. Zbl. 21, 407); Ausdehnung auf Räume mit Riemannscher Maßbestimmung mit Verwendung des Tensorkalküls.

Hornich (Wien).

Sobrero, Luigi: Sopra un problema di elettrostatica. Mem. Accad. Ital. 10, 143—157 (1939).

Das klassische Problem der Elektrizitätsverteilung auf zwei nebeneinander befindlichen, leitenden Kugeln S_1 und S_2 (deren Zentren A und B sind) mit den Ladungen Q_1 und Q_2 ist von Poisson (1812) und von G. Plana (1845) gelöst worden. Später wurde es auch von anderen Gelehrten wieder aufgenommen. Dieses Problem ist gleichbedeutend mit der Berechnung der Potentiale V_1 und V_2 , die von den Ladungen Q_1 und Q_2 im Raum bestimmt werden. Poisson und Plana hatten ein elegantes Verfahren zur Berechnung der genannten Potentiale auf der Verbindungslinie AB der Zentren der beiden Kugeln ausgedacht (die Potentiale der übrigen Punkte im Raum wurden von den Genannten auf anderem, etwas künstlichem Wege berechnet). Verf. zeigt, daß sich das von Poisson und Plana angewandte Verfahren derart erweitern läßt, daß es die zahlenmäßigen Werte der genannten Potentiale für jeden Punkt im Innern der beiden Kugeln und deshalb auch, wie bekannt, im gesamten Raum direkt liefert.

L. Cesari (Pisa).

Integraltransformationen:

● **Droste, H. W.: Die Lösung angewandter Differentialgleichungen mittels Laplace-scher Transformation. Mit einem Vorwort v. G. Doetsch. (Neuere Rechenverfahren d. Techn. H. 1.)** Berlin: E. S. Mittler & Sohn 1939. 35 S. RM. 5.—.

Die symbolische Methode von Heaviside zur Lösung von Differentialgleichungen erfreut sich bei den Ingenieuren großer Beliebtheit. Eine strenge Grundlegung und klare Abgrenzung des Gültigkeitsbereiches des Kalküls ist bekanntlich mit Hilfe der Laplacetransformation möglich. Die auch für die angewandte Mathematik überaus fruchtbare Theorie dieser Transformation hat durch das bekannte Buch von G. Doetsch (dies. Zbl. 18, 129) erstmals eine zusammenfassende Darstellung erfahren. Die streng mathematische Durchführung und wissenschaftliche Vielgestaltigkeit des erwähnten Werkes werden aber dem Techniker, der sich neu in die Theorie einarbeiten oder sich etwa nur die Nutzenanwendung auf die Probleme seiner Praxis sichern will, erhebliche Mühe bereiten. Der Verf. der hier referierten Schrift, die übrigens beim Erscheinen des Buches von G. Doetsch kurz vor ihrem Abschluß stand, hat es in vorzüglicher Weise verstanden, die für die Anwendung auf die Differentialgleichungen der Technik erforderlichen Teile der Theorie dem Ingenieur leicht zugänglich zu machen. Dies gelang durch Beschränkung der Auswahl auf das Notwendigste, durch übersichtliche Anordnung von Definitionen und Sätzen und vor allem durch beständige Verwendung der dargebotenen Theorie für Beispiele der Praxis. — Der Umstand, daß die Sätze nicht unter den schwächsten Voraussetzungen formuliert und bewiesen zu werden brauchten, und daß gelegentlich bei tiefer gehenden Studien auf das Werk von G. Doetsch verwiesen werden konnte, scheint eine so kurze und klare Darstellung der Theorie

erleichtert zu haben. Nach einigen geschichtlichen Bemerkungen über die Förderungen der Theorie von den Experimenten von Heaviside bis zur strengen Grundlegung durch Doetsch werden die Grundbegriffe vorgetragen und einige Laplacesche Integrale ermittelt. Es folgt eine Serie von Sätzen (Additionssatz, Dämpfungssatz, Verschiebungssatz usw.), das eigentliche Einmaleins der Theorie, die mit einem vom Verf. stammenden „Aufteilungssatz“ schließt, der die Separation von Dauer- und Ausgleichsvorgang betrifft, eine Zerlegungsmöglichkeit der einem bestimmten Produkt als Bildfunktion entsprechenden Originalfunktion, die bereits in der Sprache der Technik formuliert wird. Im Anschluß werden gew. Diff.-Gleichungen mit konstanten Koeffizienten und Störungsfunktionen behandelt. Verschiedene Beispiele. Ein besonderer Abschnitt wird den Besselschen Funktionen gewidmet, und es werden einige Relationen für spätere Verwendung bereitgestellt. Endlich wird die Behandlung von part. Diff.-Gleichungen kurz gestreift und ein besonders reichhaltiges Beispiel (Gleichung für die unbeeinflusste Doppelleitung) vorgetragen. Den Abschluß bildet eine Zusammenstellung von 25 Laplaceintegralen. *Hadwiger (Bern).*

Feller, Willy: Completely monotone functions and sequences. *Duke math. J.* **5**, 661—674 (1939).

Es handelt sich um die Darstellung von $f(x)$ durch ein Laplace-Stieltjes- (L.S.) Integral (1) $\int_0^\infty e^{-xt} dF(t)$. Verf. gibt erstens einen einfachen Beweis des S. Bernstein-

D. V. Widderschen Satzes: Damit $f(x)$ durch (1) mit nicht abnehmendem und in jedem endlichen Intervall beschränktem $F(t)$ darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß $f(x)$ absolut monoton, d. h. $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ ($n = 0, 1, \dots$) ist. Dann

ist, wenn mit $F_\eta(t)$ die Funktion $\sum_0^{[t\eta]} \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n)}(\eta)$ bezeichnet wird, $F(t) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} F_\eta(t)$

in jedem Stetigkeitspunkt von $F(t)$. Ferner beweist Verf. zwei Sätze, in welchen hinreichende und notwendige Bedingungen gegeben werden, damit $f(x)$ durch ein absolut konvergentes L.S.-Integral mit einem $F(t)$ von beschränkter Schwankung in jedem

endlichen Intervall bzw. durch $\int_0^\infty e^{-xt} \varphi(t) dt$ mit in jedem endlichen Intervall be-

schränktem $\varphi(t)$ darstellbar ist. Endlich untersucht Verf. diejenigen Funktionen $f(x)$, die durch das Interpolationsproblem $f(x_n) = a_n$ ($n = 1, 2, \dots$; $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \rightarrow \infty$) entstehen; dabei wird vorausgesetzt, daß $\sum 1/x_n$ divergiert. Verf. beweist unter anderem: Damit $f(x)$ eine für $x > x_0$ absolut monotone Funktion darstellt, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Folge i_n , $(-1)^n [a_{i_0}, \dots, a_{i_n}] \geq 0$ ($n = 0, 1, \dots$) ist, wobei definiert wird $[a_n] = a_n$, $[a_{i_0}, \dots, a_{i_n}] = ([a_{i_1}, \dots, a_{i_n}] - [a_{i_0}, \dots, a_{i_{n-1}}]) / (x_{i_n} - x_{i_0})$; das Interpolationsproblem wird dann durch die Newtonsche Interpolationsformel gelöst. Ist überdies $\sum 1/x_n^2$ konvergent, so läßt sich die zu diesem $f(x)$ gehörige Funktion $F(x)$ explizit durch die a_n bzw. $[a_{i_0}, \dots, a_{i_n}]$ ausdrücken. *V. G. Avakumović (Beograd).*

Banerjee, D. P.: On the expansion of a function in a generalized Neumann series. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **10**, 261—265 (1939).

Bei der Entwicklung einer willkürlichen Funktion $f(x; \lambda, \mu)$ in eine verallgemeinerte Neumannsche Reihe \mathfrak{N} der Gestalt $\sum_{n=0}^\infty a_n J_n(\lambda x) I_n(\mu x)$ zeigt Verf. den Nutzen der Operatorenrechnung. Er besteht darin, daß die Vorzahlen a_n in \mathfrak{N} dieselben sind wie die oft leichter zu ermittelnden in der Entwicklung $\sum_{n=0}^\infty a_n J_n(z)$ einer Funktion $F(z)$, die in naher Beziehung zum Laplaceschen Bilde von $f(\sqrt{x})$ steht. So läßt sich die Entwicklung von $f(x) = x^n J_n(\sqrt{\lambda^2 - \mu^2 x})$ auf die von

$$F(z) = \left(\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 \mu^2} \right)^{n/2} z^n = 2^n \left(\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 \mu^2} \right)^{n/2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+2s)(n+s-1)!}{s!} J_{n+2s}(z)$$

zurückführen; als ihre Gestalt ergibt sich daraus

$$x^n J_n(\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} x) = 2^n \left(\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 \mu^2} \right)^{n/2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n+2s)(n+s-1)!}{s!} J_{n+2s}(\lambda x) I_{n+2s}(\mu x).$$

Entsprechende Überlegungen stellt Verf. für Reihen der Gestalt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n J_n(x)$ an; in solche entwickelt er die Funktionen x^{2m} , $1 - \cos x$, $x \sin x$. *Koschmieder* (Graz).

Hartman, Philip: An asymptotic formula for exponential integrals. Amer. J. Math. **62**, 115—121 (1940).

In Verallgemeinerung Wintnerscher Resultate [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **20**, (1934); dies. Zbl. **9**, 158] wird für Funktionen g von beschränkter Schwankung

$$\int_0^1 g(x) \exp(-sx^{\delta}) dx \sim Cg(+0)s^{-1/\delta}, \quad |s| \rightarrow \infty$$

gezeigt, wobei $\delta > 1$, $|\arg s| \leq \frac{\pi}{2}$ ist. Für $\delta > 0$, $|\arg s| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ sind Annahmen über $g(x)$ in der Umgebung von $+0$ nötig. *G. Hoheisel* (Köln).

Mohan, B.: On self-reciprocal functions. Quart. J. Math., Oxford Ser. **10**, 252—260 (1939).

Verf. beweist in Fortführung früherer Untersuchungen: Jede Funktion $g(x) = \int_0^{\infty} P(x, y) f(y) dy$ mit

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^s \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}s\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}s\right) \omega(s) x^{-s} ds$$

und

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} 2^{\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}s\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}s\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}s\right) \chi(s) x^{-s} ds,$$

wo $\omega(s)$ sowie $\chi(s)$ noch geeignet eingegengte Lösungen der Funktionalgleichung $\psi(s) = \psi(1-s)$ bedeuten, ist bezüglich der J_ν -Transformation selbstreziprok. Dieses Ergebnis wird noch verschiedentlich modifiziert und an Beispielen illustriert.

Schoblik (Brünn).

Dugué, Daniel: Sur les fonctions méromorphes transformées de Fourier de fonctions monotones. C. R. Acad. Sci., Paris **208**, 1547—1549 (1939).

This paper proves that the characteristic function $\frac{\Gamma(\alpha + iz + 1)}{\alpha!} \frac{\Gamma(\beta - iz + 1)}{\beta!}$, α and β being parameters, cannot be divisible by the characteristic function of the gaussian normal law $e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$ and that it can be, however, decomposable into the infinite products of the characteristic functions of the form $e^{imz}/(1 - ikz)$, m and k being real numbers. The latter part of this paper discusses some classes of the characteristic functions which are meromorphic. *T. Kitagawa* (Hukuoka).

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Hadwiger, H.: Über das Umordnungsproblem im Hilbertschen Raum. Math. Z. **46**, 70—79 (1940).

Es sei $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ eine Nullfolge von Vektoren aus dem m -dimensionalen Vektorenraum \mathfrak{S}_m . Es sei $[\mathfrak{A}_n] = \sum_{i=1}^n a_i$. Ein Punkt x von \mathfrak{S}_m heißt Summenhäufungspunkt von \mathfrak{A} , wenn er ein Häufungspunkt der Folge $[\mathfrak{A}_n]$ ist (Terminologie von A. Wald,

vgl. dies. Zbl. 7, 360). Die Menge aller Summenhäufungspunkte, die zur Folge \mathfrak{U} und zu allen aus \mathfrak{U} durch Umordnung hervorgehenden Folgen gehören, wird mit \mathfrak{S} bezeichnet (Summenhäufungspunktmenge von \mathfrak{U}). Die Umordnungssummenmenge \mathfrak{U} der Folge \mathfrak{U} wird folgendermaßen erklärt: ein Punkt u von \mathfrak{S}_m gehört dann zu \mathfrak{U} , wenn es eine Umordnung \mathfrak{U}' von \mathfrak{U} gibt, so daß $\{\mathfrak{U}'_n\}$ gegen u konvergiert. Es ist bekannt, daß \mathfrak{S} gleich \mathfrak{U} ist. Da aber \mathfrak{U} nach dem Steinitz'schen Umordnungssatz [vgl. J. reine angew. Math. 143, 128—175 (1913)] eine lineare Mannigfaltigkeit ist, so ist es \mathfrak{S} auch. — Verf. untersucht nun das Problem, inwieweit diese bekannten Sätze für Vektorenfolgen aus dem Hilbert'schen Raum \mathfrak{H} statt aus \mathfrak{S}_m gültig bleiben. Es wird gezeigt, daß \mathfrak{S} auch dann eine abgeschlossene Menge ist, und einen Modul bildet (d. h. mit u, v, w gehört auch $u + v - w$ zu \mathfrak{S}). Die Identität $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{U}$ gilt aber im allgemeinen nicht mehr. \mathfrak{S} ist auch nicht immer eine lineare Mannigfaltigkeit. Unter Umständen kann natürlich \mathfrak{S} eine lineare Mannigfaltigkeit sein, und es wird an einem Beispiel gezeigt, daß \mathfrak{S} auch mit dem ganzen \mathfrak{H} zusammenfallen kann. Béla von Sz. Nagy.

Artemenko, A.: La forme générale d'une fonctionnelle linéaire dans l'espace des fonctions à variation bornée. Rec. math. Moscou, N. s. 6, 215—219 u. franz. Zusammenfassung 219—220 (1939) [Russisch].

Jede Funktion von beschränkter Variation auf $0 \leq t \leq 1$ kann als Summe ihres stetigen Teiles und zweier Funktionen der Sprünge dargestellt werden, so daß sich Verf. nach einer Diskussion des leichteren Falles der Funktionen der Sprünge auf stetige Funktionen beschränken kann. Als Norm wird die Schwankung genommen. Verf. gibt zuerst eine unendliche Menge linearer Teilräume \mathfrak{R}_α des Raumes V_c aller stetigen Funktionen von beschränkter Schwankung auf $0 \leq t \leq 1$ an, die mit dem Raume $A = \mathfrak{R}_0$ der absolut stetigen Funktionen isometrisch sind, derart, daß jede Funktion x aus V_c eindeutig als Summe abzählbar vieler $x_n \in \mathfrak{R}_{\alpha_n}$ mit $\|x\| = \sum \|x_n\|$ geschrieben werden kann. Die allgemeine Form eines linearen Funktionals auf V_c wird dann als Anwendung der entsprechenden Formel für A erhalten.

Bedřich Pospíšil (Brünn).

Steen, S. W. P.: Introduction to the theory of operators. IV. Linear functionals. Proc. Cambridge Philos. Soc. 35, 562—578 (1939).

Die axiomatischen Voraussetzungen sind zuerst dieselben wie in Teil III [Proc. London Math. Soc., II. s. 44, 398—411 (1938); dies. Zbl. 19, 216]. Im Ring der beschränkten Operatoren, der ein metrischer Raum ist, werden beschränkte Linearfunktionen eingeführt. Mit ihrer Hilfe werden nach dem Vorbild von J. v. Neumann [Math. Ann. 102, 370—427 (1929)] die gleichmäßige, die schwache und die starke Topologie für Operatoren eingeführt. Das ursprüngliche Abgeschlossenheitsaxiom wird dann durch die Forderung der Abgeschlossenheit des Systems der beschränkten Operatoren bezüglich der starken Konvergenz ersetzt, ferner wird eine Separabilitätsforderung hinzugenommen. Diese Voraussetzungen werden wiederum durch das System der n -reihigen Hermiteschen Matrizen erfüllt, aber auch durch die von F. J. Murray und J. v. Neumann [Ann. of Math., II. s. 37, 116—229 (1936); dies. Zbl. 14, 161] entdeckten Systeme II_1, II_∞ von Operatoren im Hilbert'schen Raum. Die Theorie der Dimension der beiden Autoren wird hier in enger Anlehnung an ihre Ergebnisse aus den Axiomen hergeleitet und so die Möglichkeit von $II_1, II_\infty, III_\infty$ neu begründet.

G. Köthe (Münster i. W.).

Krein, M.: Sur les fonctionnelles positives additives dans les espaces linéaires normés. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 14, 227—236 u. franz. Zusammenfassung 236—237 (1937) [Russisch].

In einem Banachraum E sei eine „konische“ Menge K gegeben mit den Eigenschaften: 1. Mit x ist λx in K , $\lambda \geq 0$; 2. mit x, y ist $x + y$ in K ; 3. ist $x \in K$, so ist $-x$ nicht in K ; 4. K enthält innere Punkte. Ist $x - y$ (innerer) Punkt von K , so wird $x \geq y$ ($x > y$) gesetzt. Ein Funktional $f(x)$ in E heißt positiv, wenn $f(x) \geq 0$ für $x \geq 0$. Es wird das folgende Analogon zum Erweiterungssatz von Hahn-Banach bewiesen: Ist G ein linearer Teilraum von E , der ein $x_0 > 0$ enthält, und ist $f(x)$ ein auf G erklärtes

lineares positives Funktional, so gibt es ein lineares positives, auf ganz E erklärtes Funktional $F(x)$, das auf G mit $f(x)$ übereinstimmt. Zahlreiche Anwendungen, darunter ein einfacher Beweis des Stützebenensatzes von Ascoli-Mazur. *G. Köthe.*

Vulich, B.: Sur les méthodes linéaires de sommation dans les espaces abstraits. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 15, Nr 2, 65—70 u. franz. Text 70—75 (1938) [Ukrainisch].

Verf. hat in einer früheren Arbeit [Ann. of Math., II. s. 38, 156—174 (1937); dies. Zbl. 16, 63] in Banachräumen E neben der metrischen Konvergenz eine K -Konvergenz eingeführt. Er beweist, daß jedes im Toeplitzschen Sinn reguläre Limitierungsverfahren $A = (a_{ik})$ sowohl in bezug auf die metrische wie auf die K -Konvergenz in E regulär ist, ferner, daß es in vielen E kein Verfahren A gibt, das jeder metrisch konvergenten Folge stets eine K -konvergente Folge mit demselben Limes zuordnet. *G. Köthe.*

Smulian, V.: On the principle of inclusion in the space of the type (B). Rec. math. Moscou, N. s. 5, 317—327 u. engl. Zusammenfassung 327—328 (1939) [Russisch].

Ein Banachscher Raum E heißt regulär, wenn zu jedem linearen Funktional F auf \bar{E} ein Punkt x in E vorhanden ist mit $F(f) = f(x)$ für jedes f in \bar{E} . Mit Hilfe der sog. ϕ -Konvergenz erhält Verf. notwendige und hinreichende Bedingungen für die Regularität von E (z. B.: jede transfinite abnehmende Folge von beschränkten konvexen abgeschlossenen Mengen hat einen nicht leeren Durchschnitt) und für die schwache Kompaktheit von Teilmengen von E . Im zweiten Teil werden Bedingungen für die reguläre Abgeschlossenheit linearer Teilräume F von \bar{E} erörtert, z. B.: Jede transf. abnehmende Folge von beschr. konvexen transfinit abgeschlossenen Mengen in \bar{E} , die sämtlich F treffen, hat mit F einen nicht leeren Durchschnitt. Endlich gibt Verf. eine Bedingung für schwache Kompaktheit einer separablen, schwach abgeschlossenen, beschr. Teilmenge F von \bar{E} : Jede abnehmende Folge (vom Typus ω) von beschr. konvexen, schwach abgeschlossenen Mengen, die sämtlich F treffen, hat mit F einen nicht leeren Durchschnitt.

Bedřich Pospíšil (Brünn).

Dunford, Nelson, and B. J. Pettis: Linear operations among summable functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 25, 544—550 (1939).

Let S be an arbitrary space with a completely additive non-negative measure-function $\alpha(E)$ defined on a Borel field \mathfrak{C} of subsets E of S . The authors give a very concise report on their results concerning the representation of linear operations U mapping the space $L(S)$ of the α -integrable functions into a Banach space X . If X is the space $L(T)$, where T is a real interval with the usual Lebesgue measure, then they obtain the following integral representation:

$$U(\varphi) = \frac{d}{dt} \int_S K(s, t) \varphi(s) d\alpha, \quad \varphi \in L(S),$$

with suitably chosen nucleus $K(s, t)$ defined on $S \times T$ which renders the integral absolutely continuous in t . — Besides such theorems on “general operations to restricted spaces” the authors consider also “restricted operations to general Banach spaces”. Restriction means that the operations are supposed to be either completely continuous (c. c.), or weakly c. c. (i. e., transforming bounded sets into weakly compact sets), or separable (i. e., possessing a separable range). One of the results obtained is a generalisation of a mean ergodic theorem of Kakutani and Yosida (this Zbl. 20, 39).

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Yosida, Kôsaku: Asymptotic almost periodicities and ergodic theorems. Proc. Imp. Acad. Jap. 15, 255—259 (1939).

Le but de ce travail est de compléter les travaux précédents de l'auteur (ce Zbl. 19, 414) et de S. Kakutani (ce Zbl. 19, 416) sur les théorèmes ergodiques. L'auteur démontre une série de théorèmes sur la convergence des opérations linéaires itérées en relation avec les fonctions quasi périodiques. Par exemple, il démontre qu'une fonction

$f(t)$ continue et quasi-périodique (dans le sens de Bohr) dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ étant donnée, la limite

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_s^{s+u} f(t) dt$$

existe uniformément par rapport à s pour $-\infty < s < \infty$. *B. Hostinský* (Brünn).

Variationsrechnung:

McShane, Edward James: Curve-space topologies associated with variational problems. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 9, 45—60 (1940).

L'A. si propone di indicare qualche definizione di intorno del primo ordine di una curva, che si presti a introdurre (è ovvio il come) una corrispondente nozione di minimo relativo debole di un integrale del calcolo delle variazioni. — L'A. presenta, nell'insieme delle curve di S , rappresentabili parametricamente mediante funzioni assolutamente continue, sei diverse definizioni di intorno del primo ordine di una curva assegnata e ne esamina le relazioni reciproche. Negli spazi topologici, che così viene a definire, introduce o delle „distanze“ o degli „scarti regolari“ e studia come quegli spazi, o sottospazi convenienti, si comportino di fronte alla compattezza o alla separabilità. Indica infine quali delle sei topologie considerate meglio si prestino a introdurre la nozione di minimo relativo debole, cui si è alluso più sopra, e quali siano insufficienti allo scopo.

G. Scorza-Dragoni (Padova).

Viola, Tullio: Procedimenti costruttivi per le estremanti di un funzionale. Rend. Circ. mat. Palermo 62, 105—136 (1939).

Enthält die ausführliche Darstellung einer Methode für die Annäherung der Extremanten von $\int_a^b F(x, y, y') dx$ und die ausführliche Begründung der entsprechenden Sätze, zusammen mit Anwendungen. Methode und Sätze sind in den in dies. Zbl. 20, 307—308 referierten Arbeiten des Verf. schon angegeben. *G. Scorza-Dragoni* (Padova).

McShane, E. J.: On multipliers for Lagrange problems. Amer. J. Math. 61, 809—819 (1939).

Il presente lavoro, redatto in continuazione ad una precedente Memoria di G. A. Bliss [Amer. J. Math. 52, 673—744 (1930)], si occupa del problema di Lagrange con punti terminali variabili: fra le curve $y_i = y_i(x)$, ($x_1 \leq x \leq x_2$; $i = 1, 2, \dots, n$), soddisfacenti alle equazioni differenziali $\Phi_\alpha(x, y_1, \dots, y_n; y'_1, \dots, y'_n) = 0$, ($\alpha = 1, 2, \dots, m$; $m < n$), e i cui punti terminali verificano le condizioni $\Psi_\mu(x_1, y(x_1), x_2, y(x_2)) = 0$, ($\mu = 1, 2, \dots, p$; $p \leq 2n + 2$) trovare quella che rende minimo l'integrale $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y_1, \dots, y_n; y'_1, \dots, y'_n) dx$. — L'A., attenendosi, in modo analogo al Bliss, al metodo dei moltiplicatori, dimostra che per ogni arco minimante esiste una costante $\lambda_0 \geq 0$, e un insieme di funzioni $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$, tali che per la funzione $F = \lambda_0 f + \lambda_1 \Phi_1 + \dots + \lambda_m \Phi_m$ sono verificate la condizione di Du Bois-Reymond, quella di trasversalità e quelle di Weierstrass e di Clebsch. Inoltre la costante λ_0 e le funzioni $\lambda_\alpha(x)$ non sono tutte identicamente nulle sull'intervallo (x_1, x_2) , e, ad eccezione dei valori di x corrispondenti a punti angolosi della curva minimante, sono continue.

S. Cinquini (Pavia).

Douglas, Jesse: The higher topological form of Plateau's problem. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 8, 195—218 (1939).

In questi ultimi anni è stato brillantemente risolto, in diversi modi, il problema di Plateau da parte di parecchi autori (Garnier, Douglas, Rado, McShane, Tonelli, Courant), i cui procedimenti si ispirano, più o meno, ai concetti che sono alla base delle moderne ricerche variazionali. Nel presente lavoro l'A. esamina in modo comparativo i diversi metodi che egli ha seguito nelle sue numerose pubblicazioni

nel caso in cui la ricerca della superficie di area minima si faccia in uno spazio euclideo ad n dimensioni fra le superfici $S(x = x(u, v))$, aventi ordine di connessione h e limitate da k contorni $(\Gamma) = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k)$. È noto che il contributo essenziale portato dall'A. al problema in questione, è basato sulla considerazione del funzionale

$$D(x) \equiv \frac{1}{2} \iint (E + G) du dv \equiv \frac{1}{2} \iint \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_i}{\partial v} \right)^2 \right] du dv.$$

Rappresentata S parametricamente su una superficie di Riemann R , e indicata con $X = g(z)$ la rappresentazione parametrica del contorno (Γ) di S su quello C di R , il minimo di $D(x)$ è fornito dalla funzione $H(u, v)$ armonica su R e determinata dai valori al contorno g su C . Lo studio del problema in questione è così ricondotto alla ricerca del minimo del funzionale $A(g, R) \equiv D(H)$ e consta di due parti: 1° dimostrazione dell'effettiva esistenza di tale minimo; 2° discussione della condizione di Euler-Lagrange: $\delta(A(g, R)) = 0$. L'A. ha studiato tale equazione in due diversi modi, i quali utilizzano, rispettivamente, l'uno lo studio diretto della funzione di Green su una superficie generale di Riemann, l'altro la funzione Θ di Jacobi. Dal confronto di tali metodi l'A. conclude che il primo offre il vantaggio di potersi estendere al caso (considerato dall'A. in altri lavori), in cui R abbia un numero infinito di contorni e ordine di connessione infinito, mentre il secondo si presenta particolarmente indicato per passare dal caso in cui l'ordine di connessione sia nullo a quello in cui tale ordine sia maggiore di zero e finito.

S. Cinquini (Pavia).

Reid, William T.: The Jacobi condition for the double integral problem of the calculus of variations. Duke math. J. 5, 856—870 (1939).

L'A. si occupa della condizione di Jacobi relativa all'integrale doppio

$$I[z] = \iint_A f(x, y, z, z_x, z_y) dx dy,$$

per eliminare alcune restrizioni che limitano i risultati stabiliti da altri autori. Sia A una regione aperta, limitata e connessa del piano (x, y) e sia C la sua frontiera. Si considerano superfici $z = z(x, y)$ (x, y in A) per le quali: (I) $z(x, y)$ è in A una funzione della classe C' ; $z(x, y)$, $z_x(x, y)$, $z_y(x, y)$ sono continue anche sulla frontiera C , nel senso che esistono tre funzioni $z_0(x, y)$, $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ continue in $A + C$ e che in A coincidono rispettivamente con z , z_x , z_y ; (II) i valori $(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y))$ per (x, y) in $A + C$ appartengono al campo di definizione della funzione $f(x, y, z, p, q)$, la quale appartiene alla classe C'' . Si dimostra che, se $z = Z(x, y)$ è una superficie ammissibile che fornisce un minimo relativo per $I(Z)$ fra le superfici ammissibili che assumono su C [nel senso indicato in (I)] gli stessi valori di Z , deve essere verificata per ogni curva semplice chiusa regolare Γ giacente, insieme con il campo che essa racchiude, in A l'equazione $\int_{\Gamma} f_p dy - f_q dx = \int_A f_z dx dy$, ove le f_p , f_q , f_z sono calcolate in (x, y, Z, Z_x, Z_y) . Successivamente, posto

$$2\omega(x, y, \zeta, \pi, k) = f_{pp}\pi^2 + 2f_{pq}\pi k + f_{qq}k^2 + 2f_{pz}\pi\zeta + 2f_{qz}k\zeta + f_{zz}\zeta^2,$$

si dice che una funzione $u(x, y)$ della classe C' soddisfa all'equazione accessoria di Haar, se è

$$\int_{\Gamma} \omega_{\pi}(u) dy - \omega_k(u) dx = \int_A \omega_{\zeta}(u) dx dy,$$

ove le derivate parziali ω_{π} , ω_k , ω_{ζ} sono calcolate in (x, y, u, u_x, u_y) . — Il risultato più notevole conseguito dall'A. è il seguente: Se $E: z = Z(x, y)$ è una superficie minimente non singolare (tale cioè che $f_{pp}f_{qq} - f_{pq}^2 \neq 0$) e \bar{A} è un insieme di punti di A connesso e aperto con frontiera \bar{C} , non può esistere alcuna soluzione $u(x, y)$ dell'equazione accessoria di Haar, soddisfacente in $A + \bar{C}$ alla condizione (I) e tale che sia $u \neq 0$ in \bar{A} , $u \equiv 0$ in \bar{C} , e $|u_x| + |u_y| \neq 0$ in quella parte di \bar{C} che appartiene ad A . S. Cinquini.

Funktionentheorie:

Féodoroff, V. S.: Sur les suites des intégrales curvilignes. Rec. math. Moscou, N. s. 6, 53—65 u. franz. Zusammenfassung 65 (1939) [Russisch].

Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Morera (Umkehrsatz des Cauchyschen Integralsatzes). Es sei $f(z)$ eine komplexe stetige Funktion in einem einfach zusammenhängenden Gebiet Δ der z -Ebene und E eine perfekte nirgends zusammenhängende Menge von Punkten aus Δ . Verf. beweist, daß $f(z)$ unter folgenden Bedingungen in Δ holomorph ist: 1. Das Integral $I(L) = \int_L f(z) dz$,

wo L eine einfache geschlossene rektifizierbare Kurve in Δ ist, ist in der Umgebung jedes Punktes von E beschränkt. 2. Für jedes L aus Δ , welches nur im Innern und im Äußeren, daß heißt auf sich keine Punkte von E enthält, ist $I(L) = 0$. S. Stoilow.

Fulton, Dawson G.: Further generalizations of the Cauchy integral formula. Amer. J. Math. 61, 843—852 (1939).

Siano i piani x, y e X, Y in corrispondenza conforme. Se la corrispondenza è conosciuta tra i punti di due linee chiuse c, C , ed è dato un punto (x^0, y^0) interno a c , si possono calcolare le coordinate del punto (X^0, Y^0) corrispondente, mediante formule integrali (che si ottengono dalla formula di Cauchy per le funzioni di una variabile complessa, separando la parte reale e l'immaginaria). L'A. scrive formule dello stesso tipo per il caso di corrispondenze, che si ottengono da corrispondenze conformi con una trasformazione affine su ciascuno dei piani x, y e X, Y . — Le considerazioni sono estese anche a spazi a più dimensioni. E. Martinelli (Roma).

Poor, Vincent C.: On circulation functions. Amer. J. Math. 61, 833—842 (1939).

Le „funzioni a circolazione“, considerate dall'A., sono $f(z)$ poligene soddisfacenti al teorema integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c f(z) dz = \frac{1}{\pi} \int_\sigma \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\sigma,$$

essendo $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ la derivata areolare di Pompeiu, e c il contorno di una regione σ del piano della variabile complessa z . (Soddisfa al teorema ogni $f(z)$ poligena continua, le cui parti reale e immaginaria ammettano derivate parziali prime continue.) — L'A. considera l'integrale $\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z-x} dz$, allorchè il punto x cade su c , e se ne serve per stabilire

una condizione integrale necessaria e sufficiente per l'esistenza di una $f(z)$, della quale è assegnata $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ in σ , e $f(x)$ per i punti x di c . — Tali considerazioni sono poi estese al caso di una $f(z)$ definita all'esterno di c , e finita all'infinito; ed è altresì indicato come siano trasportabili alle funzioni a circolazione di 2ª specie, le quali soddisfanno ad un teorema integrale analogo al detto, con $d\bar{z}$ in luogo di dz , e $-\frac{\partial f}{\partial \beta}$ (derivata media di Kasner) in luogo di $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$. E. Martinelli (Roma).

Haag, Jules: Sur la formule de Cauchy et le problème de Dirichlet. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 1188—1191 (1939).

Der Verf. setzt

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

wo z und ζ komplexe Zahlen sind, von denen ζ auf der Kurve Γ (geschlossen oder nicht), liegt, die überall, bis auf endlich viele Winkelpunkte, eine stetige Tangente besitzt. Es bedeutet s die Bogenlänge längs Γ zwischen ζ und einem festen Punkte, und $f(s)$ eine gegebene stetige Funktion, die (ebenso wie der Richtungswinkel der Tangente) gewissen Hölderschen Bedingungen genügt. Wenn z sich an ζ auf Γ unbegrenzt nähert, findet Verf. für $F(z)$ den Grenzwert

$$F(s) = \frac{\beta}{2\pi} f(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta')}{\zeta' - \zeta} d\zeta',$$

(wo \int den Hauptwert des Integrals andeutet; $\alpha = 2\pi - \beta$ ist der Winkel zwischen den beiden Tangenten in ζ , in deren Winkelraum z sich bei der Annäherung befindet). Der Verf. betrachtet weiter $F(s) = P(s) + iQ(s)$ als gegeben und sucht $f(s)$. Zu diesem Zweck betrachtet er die allgemeinere Integralgleichung

$$f(s) = \lambda \frac{i}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(s')}{\zeta' - \zeta} d\zeta' + 2F(s)$$

und bekommt für Nichtwinkelpunkte auf Γ

$$(1 - \lambda^2)f(s) = 2F(s) + 2\lambda \frac{i}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{F(s')}{\zeta' - \zeta} d\zeta'.$$

Für $\lambda = \pm 1$ bekommt er für $F(s)$ die Bedingung

$$F(s) = \frac{\lambda}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(s')}{\zeta' - \zeta} d\zeta',$$

die mit dem System

$$P(s) = \lambda \int K(s, s') P(s') ds' + \lambda \int G(s, s') Q(s') ds',$$

$$Q(s) = \lambda \int K(s, s') Q(s') ds' - \lambda \int G(s, s') P(s') ds'$$

gleichbedeutend ist, wo $K(s, s') = \frac{1}{\pi} \frac{\partial \varphi_{ss'}}{\partial s'}$ und $G(s, s') = \frac{1}{\pi} \frac{\partial \log r_{ss'}}{\partial s'}$ ist und $r_{ss'}$ und $\varphi_{ss'}$ die Polarkoordinaten von s' bedeuten (mit s als Pol). Wenn $Q(s)$ gegeben wird, ist die Lösung der ersten von der Form $P_1(s) + C$ ($\lambda = 1$), die auch der zweiten genügt. Daraus kann man eine Lösung des Dirichletschen Problems bekommen. Hössjer.

Lehmann, Armin: Über die Inversion des Gauss'schen Wahrscheinlichkeitsintegrals.

Bern: Diss. 1939. 39 S.

Die Arbeit behandelt die Aufgabe, die durch die Gleichung $\zeta = \int_0^z e^{-t^2} dt$ definierte analytische Funktion in der Form $z = z(\zeta)$ umzukehren. Als Sonderfall einer allgemeinen Operatorenmethode für die Umkehrung von Funktionen der Form $\int_0^z \frac{dt}{\alpha(t)}$ ergibt sich die Lösung

$$z = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(e^{z^2} \frac{d}{dz} \right)^{\nu-1} e^{z^2} \right\}_{z=0} \frac{\zeta^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \{R_{\nu-1}(z) \cdot e^{\nu z^2}\}_{z=0} \frac{\zeta^\nu}{\nu!},$$

worin die R_ν Polynome ν -ten Grades sind, die sich aus der Rückschlußformel: $R_{\nu+1}(z) = 2(\nu+1)zR_\nu(z) + R'_\nu(z)$, $R_0(z) = 1$ bestimmen. Setzt man also: $R_\nu(0) = q_\nu$,

so ist $z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q_{2\nu}}{(2\nu+1)!} \zeta^{2\nu+1}$, wobei aus dem Konvergenzradius sich für die rasch

wachsenden ganzen Zahlen $q_{2\nu}$ das asymptotische Gesetz $q_{2\nu} \propto \left(\frac{4\nu}{e\sqrt{\pi}} \right)^{2\nu}$ ergibt. Diese

Lösung vergleicht Verf. mit der aus anderen Methoden, insbesondere der symbolischen Methode von Cioranescu (dies. Zbl. 13, 357) und der Residuenmethode von Allara [Rend. Circ. mat. Palermo 51 (1927)], gewonnenen. Schließlich kann man aus der Bürmann-Lagrangeschen Reihe nach dem Vorbild von Morgan Ward [Rend. Circ. mat. Palermo 54, 42–46 (1930)] eine Determinantendarstellung der $q_{2\nu}$ gewinnen (vgl. auch dies. Zbl. 21, 338).

Harald Geppert (Berlin).

Tsuji, Masatsugu: On the determination of the singular point on the half-line through the center of the convergence circle. Jap. J. Math. 15, 303–306 (1939).

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sei eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion. Es wird aus den Koeffizienten $\{a_n\}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) diejenige singuläre Stelle von $f(z)$ bestimmt, welche sich auf der positiven reellen Achse befindet und $z = 0$ am nächsten liegt. Lamme (Prag).

Macintyre, A.: On a theorem concerning functions regular in an annulus. *Rec. math. Moscou*, N. s. 5, 307—308 u. engl. Zusammenfassung 308 (1939) [Russisch].

$f(z)$ sei im Kreisring $1 < |z| < R$ eindeutig, regulär und $\neq 0$; wächst dann $\ln f(z)$ bei einem positiven Umlauf von z um 0 um $2\pi i$, so gilt die Ungleichung

$$\max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \left| \frac{f(Re^{i\varphi})}{f(e^{i\varphi})} \right| \geq R;$$

sie stellt eine Modifikation einer Pölyaschen Ungleichung [Ann. of Math., II. s. 34, 617—620 (1933); dies. Zbl. 7, 169] dar. *Harald Geppert* (Berlin).

Herzig, Alfred: Die Winkelderivierte und das Poisson-Stieltjes-Integral. *Math. Z.* 46, 129—156 (1940).

Der Verf. gibt im 1. Abschnitt der Arbeit einen neuen Beweis des Satzes von Julia-Carathéodory über die Winkelderivierte D einer analytischen Funktion $F(z)$ in $|z| < 1$ mit $|F(z)| \leq 1$ (Klasse \mathfrak{S}). Der Gedankengang: Zu jeder analytischen Funktion $f(z)$ in $|z| < 1$, $Rf(z) = u_1 - u_2$, $u_i \geq 0$, $\Delta u_i = 0$, gehört eine Funktion $\alpha(\vartheta)$

von beschr. Schwankung, so daß für $|z| < 1$ $f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} d\alpha(\vartheta) + iv(0)$ ($v(z) = If(z)$).

Setzt man $f(z) = \frac{1 + F(z)}{1 - F(z)}$, so ist $D = \frac{1}{\mu}$, $\mu = \alpha(0+) - \alpha(0-)$. Daraus folgt sofort $D \geq 0$, sogar $D \geq n + \frac{|1 - A_n|^2}{1 - |A_n|^2}$, wenn $F(z) = \sum_{k=n}^{\infty} A_k z^k$. Dieser Satz enthält eine Verschär-

fung des Satzes von Löwner. Ist $\mu > 0$, so folgt $\frac{1}{1 - F(z)} = O\left(\frac{1}{|1 - z|}\right)$ für $z \rightarrow 1$ im Winkelraum. Gilt aber sogar $\alpha(\vartheta) = O(|\vartheta|^{1-\lambda})$ ($0 < \lambda < 1$; $\vartheta \rightarrow 0$), so ist schärfer $\frac{1}{1 - F(z)} = O\left(\frac{1}{|1 - z|^\lambda}\right)$. Dies wird im 3. Abschnitt gezeigt. Im 2. Abschnitt wird das Poisson-Stieltjes-Integral selbst betrachtet. In $|z| < 1$ sei $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, dann ist $a_n = 2 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in\vartheta} d\alpha(\vartheta)$, daher $|a_n| \leq 2$. Der Fall der Gleichheit wird vollständig behandelt. *Edmund Hlawka* (Wien).

Tsuji, Masatsugu: On the theorems of Valiron and Milloux. *Jap. J. Math.* 15, 255—267 (1939).

Unter Zugrundelegung einer Ahlforsschen Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen (dies. Zbl. 11, 259) wird durch eine elementare Vorschrift über die Dichte der Massenbelegung der w -Kugel ein Satz von Valiron gewonnen (dies. Zbl. 18, 73), der die Charakteristik $T(r)$ einer in $|z| \leq R$, $r < R$, meromorphen Funktion durch die Anzahlen $N(R, a_j)$, $j = 1, 2, 3$, abschätzt, wobei die a_j drei beliebige verschiedene Werte sind: $T(r) \leq 6 \cdot \sum_{j=1}^3 N(R, a_j) + K$; K setzt sich additiv zusammen aus Gliedern, die von $R, r, a_j, w(o), w'(o)$ abhängen. Von hier aus folgt der Beweis dem von Valiron und Milloux vorgezeichneten Wege und führt zu den im Titel angegebenen Sätzen (dies. Zbl. 18, 73). *Wittich* (Göttingen).

Kasner, Edward, and John de Cicco: The derivative circular congruence-representation of a polygenic function. *Amer. J. Math.* 61, 995—1003 (1939).

Hat die Funktion $w = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$, $z = x + iy$, stetige, erste partielle Ableitungen nach x und y , so wird durch $\gamma = \frac{dw}{dz}$ eine eindeutige Abbildung der Linien-elemente der komplexen z -Ebene auf die Punkte der komplexen γ -Ebene hervorgerufen. Die Linien-elemente (x_0, y_0, θ) eines Punktes (x_0, y_0) der z -Ebene gehen in die Punkte des Kreises

$$(1) \quad (H(x_0, y_0) + iK(x_0, y_0)) + e^{-2i\theta}(h(x_0, y_0) + ik(x_0, y_0))$$

über. Die Verff. untersuchen nun: 1. Wann bei Vorgabe der 4 Funktionen H, K, h, k

eine Funktion

(2)

$$w = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

existiert, so daß die durch sie hervorgerufene Zuordnung der Linienelemente der z -Ebene zu den Punkten der γ -Ebene durch (1) charakterisiert wird. 2. Wann bei Vorgabe der Funktionen $H, K, R(x, y)$ eine Funktion (2) existiert, so daß die durch sie hervorgerufene Zuordnung der Linienelemente der z -Ebene zu den Punkten der γ -Ebene, die Linienelemente jedes Punktes (x, y) jeweils in den Kreis

$$(\alpha - H(x, y))^2 + (\beta - K(x, y))^2 = R^2(x, y), \quad \alpha + i\beta = \gamma,$$

übergeführt werden. Sodann werden Spezialfälle behandelt. S. auch dies. Zbl. 13, 312 und 19, 422. Behnke (Münster i. W.).

Lauritzen, Svend: Ein Satz über Gruppen linearer Substitutionen. Mat. Tidsskr. B 1939, 69—76 [Dänisch].

Verf. gibt einen anderen Beweis des folgenden Satzes von J. Nielsen, den dieser 1939 in einer Vorlesung bewiesen hat: Jede nichtabelsche Gruppe hyperbolischer Substitutionen, die den Einheitskreis auf sich abbilden, ist diskontinuierlich. Als Hilfsatz wird zunächst ein schwächerer Satz bewiesen, der besagt, daß jede abelsche Untergruppe einer nichtabelschen Gruppe hyperbolischer Substitutionen diskontinuierlich ist. Benutzt wird die Behandlung der hyperbolischen Substitutionen als nichteuklidische Verschiebungen längs der durch die beiden Fixpunkte gehenden festen Kreise, die nicht sowohl durch einen festen Punkt im Innern des Einheitskreises laufen als auch beliebig kleine Radien besitzen können für eine Folge von Substitutionen der Gruppe.

E. Schulenberg (Berlin).

Schubarth, Emil: Über normal-diskontinuierliche lineare Gruppen in zwei komplexen Variablen. Comment math. helv. 12, 81—129 (1940).

Die Untersuchung hat den von Myrberg eingeführten Begriff der normalen Diskontinuität im Gebiet der projektiven Geometrie und der linearen Gruppen zum Gegenstand. Um das Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie voll zur Geltung kommen zu lassen, beschränkt sich Verf. auf die Betrachtung gewisser „Gruppen 1. Klasse“. Für diese wird eine neuartige Diskontinuität, die bedingte Diskontinuität, eingeführt. Es handelt sich dabei um eine Erweiterung des Begriffs der eigentlichen Diskontinuität, welche der Myrbergschen Begriffsbildung der normalen Diskontinuität dual entspricht. Durch jede lineare Punktgruppe wird auf Grund des Dualitätsprinzips eine Ebenengruppe induziert; die Diskontinuitätseigenschaften dieser dualen Gruppen sind weitgehend voneinander unabhängig. Das Hauptresultat des ersten Teils besagt, daß eine lineare Gruppe 1. Klasse in einem Punkt p genau dann normal diskontinuierlich ist, wenn die induzierte Gruppe in jeder Ebene durch p bedingt diskontinuierlich ist. — Im zweiten Teil werden die geometrischen Eigenschaften der linearen Gruppen untersucht. Das wesentlichste Hilfsmittel dabei sind die (für eine Veränderliche von L. R. Ford eingeführten) isometrischen Gebilde. Ein solches besteht aus den Punkten, für welche die Funktionaldeterminante einer Substitution aus einer vorgelegten Gruppe den Betrag 1 hat. Mit Hilfe dieser Begriffsbildungen gelingt einerseits die geometrische Abgrenzung der Bereiche der normalen und bedingten Diskontinuität und andererseits die Konstruktion von plankonvexen Fundamentalbereichen für Bereiche normaler Diskontinuität. Ferner wird hingewiesen auf die Möglichkeit der Verallgemeinerung auf Gruppen in n Variablen und auf die Bedeutung der Bereiche normaler und bedingter Diskontinuität für die Funktionentheorie. Die Arbeit ist durch zahlreiche Beispiele bereichert.

H. Maaß (Heidelberg).

Sjöberg, Nils: Sur les minorantes sousharmoniques d'une fonction donnée. (Helsingfors, 23.—26. VIII. 1938.) 9. Congr. des Math. scand. 309—319 (1939).

Es sei $f(z)$ ($z = x + iy$) eine reelle und meßbare Funktion von x und y in einem Bereich D der z -Ebene und $(u, f) = (u, f, D)$ die Menge der in D subharmonischen Funktionen $u(z)$ mit $u(z) \leq f(z)$. Wenn es unter diesen Funktionen eine $u^*(z)$ mit $u(z) \leq u^*(z) \leq f(z)$ gibt, wird diese die größte subharmonische Minorante von f in D

genannt. — Verf. studiert die Existenz von u^* und zeigt, daß $m(z) = \sup_{(u, f, D)} u(z)$ subharmonisch und mit u^* identisch ist, wenn $f(z)$ in D gleichmäßig stetig ist. Auch wenn $f(z)$ in einem offenen Bereich D nach unten beschränkt und stetig (aber nicht gleichmäßig stetig) ist, behauptet Verf. unter Betrachtung einer iterierten Operation, daß $u^*(z) = m(z)$ existiert. — Bezüglich der Frage der Größenordnung von $m(z)$ zeigt Verf., indem er für D den offenen Bereich $|z| < 1$ nimmt, daß $m(z)$ in D nach oben beschränkt ist, wenn $f(z)$ in D nach unten beschränkt ist und das Integral $\int_{-\pi}^{+\pi} \log^+ f(e^{i\theta}) d\theta$ konvergiert.

Hössjer (Göteborg).

Temliakow, A.: Über harmonische Funktionen von drei Veränderlichen mit einer meromorphen zugehörigen Funktion. Rec. math. Moscou, N. s. 5, 487—494 (1939).

L'A. parte dalla rappresentazione integrale di Whittaker-Bergmann, per una funzione $F(x, y, z)$ armonica regolare nell'intorno dell'origine: $F = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}, u) dt$,

dove $u = x + i(y \cos t + z \sin t)$; e si limita a considerare le F la cui funzione associata f è analitica meromorfa rispetto a ciascuna delle variabili $\zeta = e^{it}$, u . Ne deduce, per prolungamento analitico della f , la rappresentazione in grande della F , e che la F è determinata quando è conosciuta sopra un pezzo comunque piccolo del cono $y^2 + z^2 = a^2 x^2$, nell'intorno del vertice (a costante arbitraria $\neq 0$). Se la F è simmetrica rispetto all'asse x , basta che sia conosciuta sopra un segmento comunque piccolo dell'asse stesso, perchè risulti determinata. — Sono date inoltre alcune proprietà relative alle singolarità di una F simmetrica.

E. Martinelli (Roma).

Martinelli, Enzo: Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse. Mem. Accad. Ital. 9, 269—283 (1938).

Für eine analytische Funktion $f(z_1, \dots, z_n)$ der n komplexen Veränderlichen $z_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) in einem reellen $2n$ -dimensionalen Raume $S_{2n}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ werden eine Reihe von Integralsätzen der Form $\int_{V_{n+l}} f(z_1, \dots, z_n) d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \dots, \bar{z}_{\alpha_l}) = 0$ bewiesen, die eine Art Zwischenstellung zwischen dem Integralsatze von Cauchy-Poincaré und einem neueren Satze von Wirtinger (vgl. dies. Zbl. 16, 408) einnehmen. Im Integral oben ist V_{n+l} ein gewisser geschlossener Unterraum der Dimension $n+l$, der sich im Regularitätsbereich der Funktion f stetig zu einem Punkte zusammenziehen läßt, $d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \dots, \bar{z}_{\alpha_l})$ das entsprechende Differential der Dimension $n+l$; $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ sind beliebige verschiedene Zahlen der Reihe $1, 2, \dots, n$. — Durch Umkehrung bekommt der Verf. Sätze, die Umkehrungen des Moreraschen Satzes sind. — Schließlich stellt der Verf. die Funktion f in einem inneren Punkte O (der der Einfachheit wegen zum Ursprung gewählt wird) eines $2n$ -dimensionalen Bereiches (der O nur einmal überdeckt) durch ein analoges $(2n-1)$ -faches Integral über die Begrenzung V_{2n-1} (die im Regularitätsbereich stetig zu O zusammenziehbar sein soll) des Bereichs dar:

$$f(0, \dots, 0) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{V_{2n-1}} \frac{\sum_{\alpha=1}^n (-1)^{\alpha-1} \bar{z}_\alpha d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)}{(z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_n \bar{z}_n)^n}.$$

Hier deutet (α) das Ausfallen des Elements $d\bar{z}_\alpha$ an. Gustav Hössjer (Göteborg).

● **Schwerdtfeger, Hans: Les fonctions de matrices. I. Les fonctions univalentes.** (Actualités scient. et industr. Nr. 649.) Paris: Hermann & Cie. 1938. 60 pag. Frs. 20.—.

Vignaux, J. C.: Theorie der Funktionen einer komplexen bidualen Veränderlichen. Contrib. estud. ci. fis. mat. 1, 505—542 (1938) [Spanisch].

Weiterführung früherer Untersuchungen des Verf. (vgl. dies. Zbl. 20, 38). Komplexe biduale Zahlen sind duale Zahlen $x + ky$ ($k^2 = 0$) mit gewöhnlichen komplexen Zahlen x, y als Koordinaten.

L. Schrutka (Wien).